O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

U. DALABOYEV

VEKTOR VA TENZOR TAHLIL

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 5140200 – «Fizika» va 5140400 – «Astronomiya» yo'nalishlari talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

TOSHKENT – 2015

UO'K: 514.742(
KBK 30.3
~~D-87~~

~~D-87~~ **U.Dalaboyev. Vektor va tenzor tahlil. –T.: «Fan va texnologiya», 2015, 160 bet.**

ISBN 978–9943–990–94–4

«Vektor va tenzor tahlil» darsligi oliy o'quv yurtlarining fizika va astronomiya yo'nalishlari bo'yicha bakalavrlar tayyorlash uchun bu fanning tasdiqlangan namunaviy o'quv dasturi asosida yaratilgan.

Darslikda vektor va tenzor tahlili kursiga oid asosiy tushuncha va tasdiqlar yoritilgan bo'lib, ularning fizik mazmuni va tatbiqlari ko'rsatilgan. Mavzular bo'yicha talabalar mustaqil ishi uchun topshiriqlar va ularni Maple tizimida yechish texnologiyasi ham berilgan.

UO'K: 514.742/743
KBK 30.3

Taqrizchilar:
A.Rasulov – f-m.f.d., professor;
A.Abdumalikov – f-m.f.d., professor.

ISBN 978–9943–990–94–4

Matematika g'oyat bir yuksak fanki, unda bir olam mo'jiza yotadi.

Mirzo Ylug'bek.

KIRISH

Matematikani o'rganishning bevosita amaliy tatbiqlaridan tashqari yosh mutaxasislarni har taraflama rivojlangan komil inson qilib tarbiyalashda uning alohida o'ringa ega ekanligi ta'kidlamasdan bo'lmaydi. Tahliliy mulohaza, mantiqiy mushohada, fazoviy tasavvur, abstrakt tafakkur inson faoliyatining barcha sohasi uchun zarur qobilyatki, bular matematikani o'rganish jarayonida shakllanib boradi.

Matematikada o'zgaruvchan miqdorlar tushunchasining kiritilishi qanday muvaffaqiyat qozongan bo'lsa, fizikada maydon tushunchasining kiritilishi ham shunday ahamiyat kasb etgan.

Mamlakatimizning oily ta'lim muassalarida barcha yo'nalishlar bo'yicha bakalavrlar tayyorlash tizimiga o'tilgach, fanlarning o'quv rejalari va dasturlarini davlat standartiga moslash, shu bilan birga, halqaro ta'lim berish standartlarini qo'llash, ajdodlarimizning boy milliy meroslarini shu jarayonga jalb qilish zarurati tug'ildi. Har bir yo'nalish bir necha mutaxassisliklami o'z ichiga olganligi sababli mamlakatimizdagi barcha oliy o'quv yurtlarida bakalavrlar tayyorlash bo'yicha fanlardan umumiy o'quv dasturi tayyorlangan.

So'nggi yillarda oliy ta'limda amalga oshirilayotgan sifat o'zgartirishlar, jumladan «5140200 – fizika» va «5140400 – astronomiya» ta'lim yo'nalishining tashkil qilinishi va muallifni ko'p yillar mobaynida O'zMU da vektor va tenzor tahlil kursidan olib borgan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarida orttirgan tajribasi ushbu darslikning yozilishiga sabab bo'ldi. Bu darslik universitetlarning «Fizika va astronomiya» (bakalavriyat) ta'lim yo'nalishi o'quv rejasidagi «Vektor va tenzor tahlili» kursi o'quv dasturi asosida yozilgan. Darslikning ko'lami talabalarning keyingi bosqichda elektrodinamika, nazariy fizika va kristallografiya kabi fanlarni o'rganishga zamin tayyorlaydi.

Bu darslikdagi ma'lumotlarni tushunish uchun talabalar matematik tahlil, vektorlar algebrasi va analitik geometriya kurslaridan kerakli bilimlarga ega bo'lishi kerak.

Ushbu darslik matematika va fizikaning muhim qismlaridan biri bo'lgan vektorlar va tenzor maydonlar tushunchasini o'rganishga, tahlil qilishga bag'ishlangan. Bu darslikdan fizika, matematika va texnika oliy ta'lim muassalari talabalari, aspirantlar va keng muhandislar guruhi foydalanishi mumkin. Undagi skalyar, vektor maydonlar va tenzorlar tushunchasi, ulardagi muhim matematik amallar sodda tilda bayon etilishiga harakat qilingan.

Dekart tomonidan koordinatalar sistemasini kiritilishi matematika va uning tatbiqlarida revolyusiya yasadi. Keyingi qadam vektor hisobning kiritilishi bo'ldi. Ba'zi fizik masalalarni yechish uchun esa murakkab miqdorlar – tenzorlar kerak bo'ladi. Tenzor kattaliklar nisbiylik nazariyasi va differensial geometriyada keng qo'llaniladi. Tenzor miqdorlar fizik jarayon xususiyatlarini invariantlari yordamida aniqlashga yordam beradi. Invariantlar deb shunday bog'lanishlarga aytiladiki, ular bir sistemadan boshqasiga o'tganda o'zgarmaydi. Fizika va mexanikaning qonunlari koordinatalar sistemasini tanlashiga bog'liq emas. Shuning uchun biror fizik jarayonning asosiy xususiyatini aniqlash uchun uning koorinatalar sistemasiga bog'liq emasligini ko'rsatish kerak bo'ladi. Fizik jarayonni ifodalovchi tenglamalarda bir sistemadan ikkinchisiga o'tish zaruriyati tug'iladi. Shuning uchun ham tenzor hisobning asosiy usulida koordinatalar sistemasini almashtirish yotadi. Fizik kattaliklar birliklarga ega. Fizik jarayonni ifodalovchi tenglamaning hadlari bir xil o'lchamli bo'lishi kerak. Bu holat esa tenglama hadlarining bir xil rangli tenzor ekanligini taqozo qiladi.

Maydonlar nazariyasidagi har bir matematik amallar nazariy va amaliy jihatdan tushunarli holda keltirilgan. Shuning uchun talabalar va fizik jarayonlar bilan mashg'ul bo'lgan mutaxassislar uchun ushbu darslik amaliy ishlariga yordam beradi.

Darslik ikki bob va ikki ilovadan tashkil topgan. Darslikning birunchi qismida skalyar va vektor maydonlarga oid tushunchalar, maydonning amallariga tegishli ma'lumotlar, maydon amallarining egri chiziqli koordinatalardagi ifodalari keltirilgan.

Tenzorga oid bo'limda unga tegishli amallar to'g'ri dekart koordinatalar sistemasida bayon qilingan. Har bir mavzular misollar bilan bayon qilingan va mustaqil ishlash uchun mashqlar berilgan.

Darslikda ikkita ilova keltirilgan. Birinchi ilovada kursni o'qitishda zarur bo'lga asosiy formulalar bayon qilingan.

Hamma sohalarda matematik qonuniyatga asoslangan zamonaviy kompyuterlarning muvaffaqiyat bilan tatbiq etilishi hamda uning kundan-kunga rivojlanib borayotgani, yosh mutaxasislarning tegishli sohalar masalalarining matematik modellarini tuza bilishi va unda hisoblash texnikasini joriy etish vazifasini qo'ymoqda. Ayniqsa, analitik hisoblashlarni amalga oshiradigan bir qancha zamonaviy paketlar ishlab chiqildi (Mathematica, MathCad, Maple va h.k). Biz mustaqil ishlarni bajarishda informatsion texnologiyalardan unumli foydalanish va zamon talabiga mos keladigan mutaxassislarni tayyorlashni nazarda tutib 2- ilovada maydon amallarini Maple tizimida bajarishga oid namunalar bilan to'ldirdik.

Har bir bob tegishli paragraflarga bo'lingan bo'lib, har bir paragraf mavzuga taalluqli asosiy ta'riflar, tasdiqlar, teoremalarni o'z ichiga oladi, shuningdek, ularning har biri an'anaviy misollarni batafsil tahlil yordamida yechish orqali namoyish qilingan.

O'ylaymizki, darslik o'z o'quvchilarini topadi va boshqa mavjud o'quv adabiyotlari qatorida vektor va tenzor tahlil kursi bo'yicha ularga bilimlarini oshirishga ko'mak beradi. Darslik haqidagi fikr mulohazalar, undagi mavjud kamchiliklar bo'yicha takliflarni muallif mamnuniyat bilan qabul qiladilar.

Muallif.

Agar insoniyat tomonidan yaratilgan
ilmiy yangiliklarning matematik
isboti bo'lmasa uni haqiqiy
fan qatoriga qo'shib bo'lmaydi.

Leonardo da Vinchi

I bob. SKALYAR VA VEKTOR MAYDONLAR

1. Skalyar maydon

- ***Skalyar maydon tushunchasi.***
- ***Maydonlarning sath sirt va chiziqlari.***
- ***Yo'nalish bo'yicha hosila.***
- ***Skalyar maydon gradienti.***
- ***Sirt normalining yo'naltiruvchi kosinuslari.***

1.1. Skalyar maydon tushunchasi

Ta'rif. Fazodagi biror D sohaning har bir M nuqtasiga aniq qonun bo'yicha biror u(M) son mos qo'yilgan bo'lsa, bu sohada u=u(M) skalyar maydon berilgan deyiladi. *D* soha sifatida fazoning biror bo'lagi, sirti yoki chizig'i bo'lishi mumkin.

Faraz qilaylik, *D* soha biror jism bilan to'ldirilgan bo'lsin. *D* sohaning biror *M* nuqtasida jism zichligi $\rho(M)$ bo'lsin. Bunday maydonni jismning zichliklar maydoni deyish mumkin. *M* dan boshqa nuqtada jism zichligi boshqa bo'lishi mumkin, yani jism *D* sohada notekis taqsimlangan bo'ladi. Agar skalyar maydon sohaning barcha nuqtalarida bir xil bo'lsa, bunday maydonni *bir jinsli maydon* deyiladi. Agar skalyar maydonning qiymati bir nuqtadan boshqa nuqtaga ko'chganda o'zgarsa bunday maydonga *bir jinssiz maydon* deymiz.

Xuddi shuningdek, atmosferaning har bir nuqtasiga bosimning aniq qiymatini mos qo'yish mumkin bo'lganligi sababli, atmosferadagi bosimlar maydoni berilgan, deyish mumkin. Qizdirilgan jismning har bir ichki nuqtasiga tempetaturaning aniq qiymatini mos qo'yish mumkin bo'lganligi tufayli, qizdirilgan jism ichida temperaturalar maydoni berilgan, deb aytish mumkin.

Ba'zan skalyar maydonning qiymati vaqtga qarab ham o'zgarib borishi mumkin. Masalan, qizdirilgan jism temperaturasi tashqi muhit temperaturasiga qarab o'zgaradi. Bunday maydonlar *nostasionar skalyar maydonlarni* tashkil qiladi. Agar skalyar maydon vaqtga bog'liq bo'lmasa bunday maydonlarni *stasionar (barqaror)* maydonlar deyiladi.

Agar fazoda $Oxyz$ koordinatalar sistemasini kiritsak, u holda har bir M nuqta ma'lum x,y,z koordinatalarga ega bo'ladi va u skalyar funksiya shu koordinatalarning funksiyasi bo'ladi $u=u(M)=u(x,y,z)$. Bu holat skalyar maydonni ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi yordamida tekshirish imkonini beradi. Fiksirlangan O nuqta olinsa fazodagi ixtiyoriy M nuqtani uning radius vektori yordamida aniqlash mumkin. Bu holda $u(M)$ skalyar maydonni $\bar{r}=\overline{OM}$ vektor argumentli skalyar funksiya deb qarash mumkin $u(\bar{r})$.

Agar skalyar maydon simmetriklik xususiyatiga ega bo'lsa, uni tahlil qilish juda osonlashadi.

Agar koordinata sistemasini shunday tanlash imkoniyati bo'lsaki unda maydon funksiyasi faqat ikki o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa bunday maydonlarga *yassi maydon* deyiladi.

Yassi maydonga bir xil isitilgan uzun aylanma trubali issiqlik trassasining atrofida joylashgan tuproq temperaturasini keltirish mumkin. Bunday holatda truba o'qiga perpendikulyar joylashgan barcha tekisliklarda tuproq harorati bir xil kechadi. Bunda tuproq temperaturasini aniqlovchi funksiya ikki o'lchovli bo'ladi (truba o'qi bo'ylab olingan koordinataga bog'liq bo'lmaydi).

Agar koordinatalar sistemasi shunday tanlansaki, unda skalyar maydon faqat bir koordinataning funksiyasi bo'lsa. Masalan, tinch holatda bo'lgan suv havzasining temperaturasini bir o'lchamli deyish mumkin. Bunda suv havzasining temperaturasi suv sathidan qancha pastda joylashganligiga bog'liq bo'ladi.

Skalyar maydonni silindrik koordinatalar sistemasida ham qarash mumkin. Agar skalyar maydon biror silindrik koordinatalar $Or\varphi z$ sistemasida φ ga bog'liq bo'lmasa, bunday maydonni *o'qqa simmetrik* deyiladi. Yuqorida keltirilgan issiqlik trassasi atrofidagi tuproq temperaturasi o'qqa simmetrik bo'ladi (agar trassa yer sathidan yetarli pastda joylashgan bo'lib, tuproq sathi bilan temperatura almashish jarayonini inobatga oinmasa). Agar yassi skalyar maydon faqat radial kordinatagagina (r) bog‘liq bo‘lsa, bunday maydonga *o‘qli maydon* deyiladi.

Agar biror sferik $Or\varphi\theta$ koordinatalar sistemasida skalyar maydon faqat masofa r ga bog‘liq bo‘lsa (M nuqtadan fiksirlangan O nuqtagacha bo‘lgan masofa), bunday maydon *markaziy maydon* deyiladi. Misol sifatida gravitatsion potensialni keltirish mumkin:

$$u(r) = G\frac{m_0}{r}$$

bu yerda G graviatasion ozgarmas, m_0 massa.

Koordinata boshida joylashtirilgan q zaryadning hosil qilgan elektrostatik potentsiali

$$U(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ham markasiy maydon bo‘ladi (koordinata boshidan tashqari).

Agar $|\vec{r}| = const$ bo‘sa, $x^2+y^2+z^2 = const$ kelib chiqadi. Shuning uchun sferada yotgan nuqtalar uchun elektrostatistik maydon potentsiali o‘zgarmas bo‘ladi: $u = const$.

1.2. Maydonlarning sath, sirt va chiziqlari.

Biz doimo $u = u(x,y,z)$ funksiyani bir qiymatli va uchala erkli o‘zgaruvchi bo‘yicha uzluksiz hosilalarga ega deb faraz qilamiz. Agar bu hosilalar bir paytda nolga aylanmasa

$$u(x,y,z) = C, \quad (C = const)$$

tenglama biror (maxsus nuqtalari bo‘lmagan) sirtni aniqlaydi.

Ta’rif. Maydon skalyari bir xil qiymatlarga erishadigan maydon nuqtalari to‘plamiga shu maydonning sath sirtlari (yoki ekvipotentsial sirtlar) deyiladi.

$u = u(x,y,z)$ funksiya bir qiymatli bo‘lganligi uchun har xil C larga mos kelgan sath chiziqlari o‘zaro kesishmaydi.

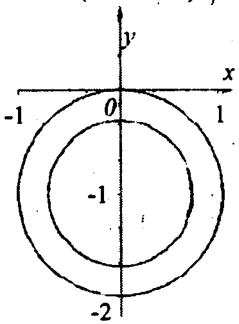
Sath sirti deb ataluvchi bu sirt nuqtalarida u o‘zgarmas qiymatni saqlaydi.

Fizik nuqtau nazardan maydonning sath sirtlari maydonning fizik hodisa bir xil sodir bo‘ladigan nuqtalarining geometrik o‘rnini bildiradi.

Xususan, yassi skalyar maydon qaralayotgan bo‘lsa, «sath sirtlari» deyish o‘rniga «sath chiziqlari» degan ibora ishlatiladi. Masalan, sinoptik kartalarda belgilanadigan izobaralar (teng bosim chiziqlari) va izotermalar (teng temperatura chiziqlari) mos ravishda bosimlar maydonni va temperaturalar maydoninig sath chiziqlarini ifodalaydi.

1-*misol.* $u=x^2+y^2+2y$ yassi skalyar maydonning sath chiziqlarini toping.

▷ Maydonning sath chiziqlarini $x^2+y^2+2y=C$ tenglama orqali ifodalanadi. Chap tomondan to'liq kvadrat ajratib $x^2+(y+1)^2=C+1$ tenglamaga kelamiz. Demak, sath chiziqlar $C\geq -1$ shartlar uchun markazi (0,-1) nuqtada joylashgan konsentristik aylanalar oilasidan iborat bo'ladi (1.1-rasm).◀

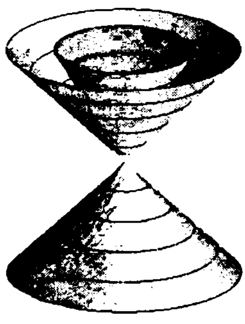


1.1- rasm

2-*misol.* $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ skalyar maydonning sath sirtlarini toping.

▷ Berilgan skalyar maydonning aniqlanish sohasi $\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq 1$ tengsizlikdan aniqlanadi. Bundan, $0<z^2\leq x^2+y^2$. Demak, berilgan skalyar maydon $G=\{(x,y,z)\neq 0: x^2+y^2\geq z^2\}$ sohada aniqlangan. Sath sirt ta'rifiga ko'ra

$$\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C\ \left(|C|\leq\frac{\pi}{2}\right)\ \Rightarrow\ \left(x^2+y^2\right)\sin^2 C-z^2=0.$$



1.2 - rasm

Shunday qilib, maydonning sath sirtlari uchlari koordinatalar boshida bo'lgan, $x^2+y^2=z^2$ sirt va undan tashqaridagi konus sirtlardan, z=0 tekislikdan iborat (O(0,0,0) nuqta kirmaydi) (1.2- rasm).◀

3-*misol.* Skalyar maydonning sath sirt tenglamasini toping.

$$u=e^{(\vec a,\vec r)}$$

bunda $\vec a$ - o'zgarmas vektor, $\vec r$ - nuqtaning radius vektori

▷ Bunda

$$\vec{r} = \{x,\ y,\ z\} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3\} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

ga teng. Ularning skalyar ko'paytmasi esa

$$(\vec{a},\vec{r}) = a_1x + a_2y + a_3z$$

Demak, sath sirt tenglamasi quyidagidek bo'ladi:

$$e^{(\vec{a},\vec{r})} = C\,,\quad C > 0$$

Bundan $(\vec{a},\vec{r}) = \ln C$ yoki $a_1x + a_2y + a_3z = \ln C$ ni olamiz. Bu parallel tekisliklar oilasini beradi.◀

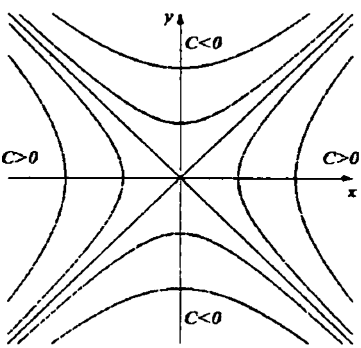
4-*misol:* $u = x^2 - y^2$ skalyar maydonning sath chizig'larini toping.

▷ $x^2 - y^2 = C\,,\qquad C = const$

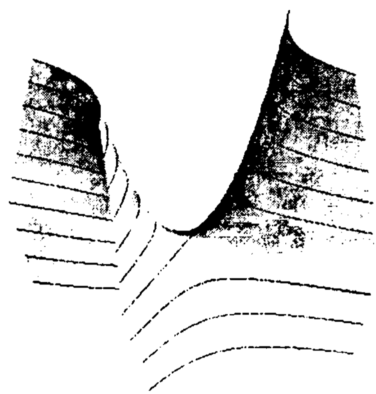
Agar C=0 bo'lsa,

$$y = x\,,\qquad y = -x \text{ ni olamiz.}$$

Agar $C \neq 0$ bo'lsa, giperbolaga o'xshab ketadi (1.3 - rasm).



1.3 - rasm

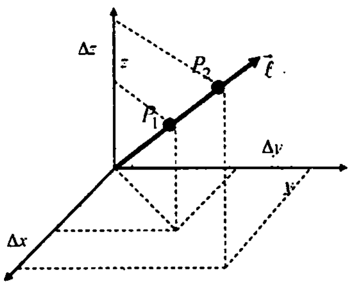


1.4 - rasm

1.4 - rasmda $u = x^2 - y^2$ funksiya sirtidagi sath chiziqlar keltirilgan. 1.3 - rasm 1.4 - rasmning sath chiziqlari *xoy* tekislikdagi proeksiyasidir. ◀

1.3. Yo‘nalish bo‘yicha hosila

Uch o‘lchovli fazoning biror G qismida $u=u(x,y,z)=u(P)$ skalyar maydon berilgan bo‘lsin. Maydonda joylashgan biror $P_1(x,y,z)$ nuqtani olamiz va bu nuqtadan chiqadigan $\vec{\ell}=\{\ell_x,\ell_y,\ell_z\}$ vektorni qaraymiz. $\vec{\ell}$ yo‘nalishda skalyar maydonning o‘zgarishini aniqlaymiz. Buning uchun $\vec{\ell}$ yo‘nalishda ikkinchi $P_2(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ nuqtani olamiz. $\overline{P_1P_2}$ vektor uzunligini $\Delta\ell$ bilan belgilaymiz (1.5– rasm): $\Delta\ell=\left|\overline{P_1P_2}\right|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$. Maydon funksiyasining ortirmasi



1.5 - rasm

$$\Delta u=u(P_2)-u(P_1)=u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-u(x,y,z)=$$
$$=du+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\theta(\Delta\ell).$$

Bu yerda $\theta(\Delta\ell)$ $\Delta\ell$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor, va $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ da $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$ bo‘ladi. $\frac{\Delta u}{\Delta\ell}=V_o$ miqdor $u(P)$ skalyar funksiyaning $\vec{\ell}$ vektor yo‘nalishidagi o‘rtacha o‘zgarish tezligini beradi.

$$\frac{\Delta u}{\Delta\ell}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta\ell}++\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta\ell}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta\ell}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta\ell}+\varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta\ell}.$$

Bu tenglikda limitga o‘tamiz: $\Delta\ell\to 0$, $(P_2\to P_1)$:

$$\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta\ell}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

Bu yerda $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ lar $\overline{P_1P_2}$ vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari. $\overline{P_1P_2}$ va $\vec{\ell}$ vektor parallel bo‘lganligi uchun ularning yo‘naltiruvchi kosinuslari mos tushadi. $\vec{\ell}=\ell_x\vec{i}+\ell_y\vec{j}+\ell_z\vec{k}$ bo‘lgani uchun

$$\cos\alpha=\frac{\ell_x}{|\ell|},\ \cos\beta=\frac{\ell_y}{|\ell|},\ \cos\gamma=\frac{\ell_z}{|\ell|},$$

bo‘ladi.

Ta'rif. Agar $\lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta\ell}$ *mavjud bo'lsa, bu limitga* $u(x,y,z)$ *skalyar maydonning* $P_1(x,y,z)$ *nuqtadagi* $\vec{\ell}$ *vektor yo'nalishidagi hosilasi deyiladi va u*

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}=\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta\ell}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

formuladan topiladi.

Yo'nalish bo'yicha hosilaning xossalari:

1) $u(P)$ funksiyaning P nuqtadagi $\vec{\ell}$ vektor yo'nalishi bo'yicha o'zgarish tezligi $\dfrac{\partial u(P)}{\partial \ell}$ ga teng.

2) $u(P)$ maydon P nuqtada $\vec{\ell}$ yo'nalish bo'yicha o'sishi uchun $\dfrac{\partial u(P)}{\partial \ell}\geq 0$.

3) $u(P)$ maydon P nuqtada $\vec{\ell}$ yo'nalish bo'yicha kamayishi uchun $\dfrac{\partial u(P)}{\partial \ell}\leq 0$.

Haqiqatan ham, 1) $\Delta u(P_1)$ miqdor $u(P)$ funksiyaning P_1P_2 kesmadagi o'zgarishidir. $\dfrac{\Delta u}{\Delta \ell}$ miqdor $u(P)$ skalyar funksiyaning $\vec{\ell}$ vektor yo'nalishidagi o'rtacha o'zgarish tezligini aniqlaydi. $\dfrac{\partial u}{\partial \ell}=\lim\limits_{\Delta\ell\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta\ell}$ esa, $u(P)$ skalyar funksiyaning $\vec{\ell}$ vektor yo'nalishidagi o'zgarish tezligini beradi.

2) $\vec{\ell}$ yo'nalishda $u(P)$ o'suvchi $\Leftrightarrow$

$$u(P_2)>u(P_1)\Leftrightarrow\frac{u(P_2)-u(P_1)}{|P_1P_2|}>0\Leftrightarrow\frac{\partial u(P_1)}{\partial \ell}\geq 0;$$

3) bu xossa ham 2) xossa kabi tekshiriladi.

Agar $\vec{\ell}$ yo'nalish koordinatalar o'qining yo'nalishlaridan biri bilan bir xil bo'lsa, u holda bu yo'nalish bo'yicha hosila tegishli xususiy hosilaga teng, shuning uchun, masalan, $\vec{\ell}$ Ox o'qi bilan mos tushsa $\cos\alpha=1, \cos\beta=0, \cos\gamma=0$ va $\dfrac{\partial u}{\partial \ell}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ bo'ladi.

Yo‘nalish bo‘yicha hosila tushunchasini biror egri chiziq yo‘nalishi bo‘yicha umumlashtirish ham mumkin. Bu holda yo‘naltiruvchi kosinuslar sifatida egri chiziqqa urinma vektori yo‘nalishining yo‘naltiruvchi kosinuslari olinadi.

1- *misol.* $u = xyz$ funksiyaning $M(-1,2,4)$ nuqtada, shu nuqtadan $M_1(-3,4,5)$ nuqtaga tomon yo‘nalishdagi hosilasini toping.

▷ $\overline{MM_1}$ vektorni topamiz.

$\overline{MM_1} = (-3+1)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (5-4)\vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ va unga mos birlik vektorni topamiz: $\vec{\ell}_0 = \dfrac{\overline{MM_1}}{\left|\overline{MM_1}\right|} = \dfrac{-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = -\dfrac{2}{3}\vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j} + \dfrac{1}{3}\vec{k}$.

Shunday qilib, $\vec{\ell}_0$ vektor quyidagi yo‘naltiruvchi kosinuslarga ega

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{1}{3}$$

Endi $u = xyz$ funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz,\ \frac{\partial u}{\partial y} = xz,\ \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

va ularni $M(-1,2,4)$ nuqtada hisoblaymiz

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = 8\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 4\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}(-8-4-1) = -\frac{26}{3}$$

«-» ishora berilgan yo‘nalishda $u = xyz$ funksiyaning kamayishini ko‘rsatadi.◀

2-*misol.* $u = xz^2 + 2yz$ funksiyaning $M_0(1,0,2)$ nuqtadagi

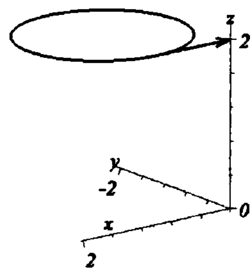
$$\left.\begin{array}{l} x = 1+\cos t \\ y = \sin t - 1 \\ z = 2 \end{array}\right\}$$

aylana bo‘ylab olingan yo‘nalish bo‘yicha hosilasini toping.

▷ Aylananing vektor tenglamasi ko‘rinishi

$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (1+\cos t)\vec{i} + (\sin t - 1)\vec{j} + 2\vec{k}$

Ixtiyoriy M nuqtadagi $\vec{\tau}$ urunma vektorini topamiz (1.6 - rasm)



1.6 - rasm

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t\cdot\vec{i} + \cos t\cdot\vec{j}$$

berilgan $M_0(1,0,2)$ nuqta xOz tekisligida birinchi oktantada joylashganligi uchun $t=\pi/2$. Bu nuqtada $\vec{\tau}$ ning qiymati

$$\vec{\tau}\big|_{M_0} = -\sin\frac{\pi}{2}\cdot\vec{i} + \cos\frac{\pi}{2}\vec{j} = -\vec{i}$$

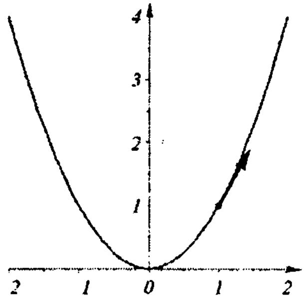
Bundan ko‘rinib turibdiki yo‘naltiruvchi kosinuslar $\cos\alpha = -1,\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = 0$ ga teng. Berilgan $M_0(1,0,2)$ nuqtada xususiy hosilalarni topamiz

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = z^2\big|_{M_0} = 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 2z\big|_{M_0} = 4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2xz + 2y)\big|_{M_0} = 4$$

Demak

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \ell}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{M_0} = 4\cdot(-1) + 4\cdot 0 + 4\cdot 0 = -4 \ \blacktriangleleft$$



1.7 - rasm

3- *misol*. Ushbu $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ skalyar maydonning $M_1(1,1)$ nuqtadagi $y = x^2$ egri chiziq bo‘yicha $M_1(1,1)$ nuqtadan $M_2(2,4)$ nuqtaga yo‘nalgan hosilasini toping (1.7 – rasm).

$\triangleright$ $y = x^2$ parabolaga o‘tkazilgan birlik urinma $\vec{\tau}^0$ vektorni topamiz.

Urinmaning burchak koeffitsiyentini topamiz.

$$y' = 2x, \quad k = 2x\big|_{x=1} = 2.$$

Urinma to‘g‘ri chiziq $M_1(1,1)$ nuqtadan o‘tadi va uning burchak koeffitsiyenti k=2 ga teng. Demak, y-1=2(x-1). Bu to‘g‘i chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishda yozamiz: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2}$. $\vec{\tau}(1,2)$ vektor urinmaning yo‘naltiruvchi vektoridir va uning yo‘nalishi $M_1(1,1)$ nuqtadan $M_2(2,4)$ nuqtaga qarab yo‘nalgandir. U holda $\vec{\tau}^0 = \frac{\vec{i}}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ birlik vektor bo‘ladi. Demak, yo‘naltiruvchi kosinuslar $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Endi xususiy hosilalarni topamiz $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

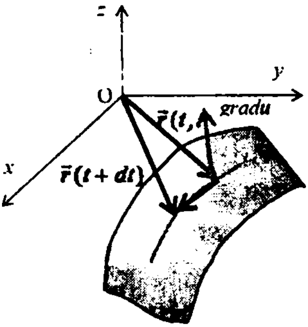
Demak, yo‘nalish bo‘yicha hosila

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

ko‘rinishda bo‘ladi. $\blacktriangleleft$

1.4. Skalyar maydon gradienti

$u = u(x,y,z)$ skalyar maydon berilgan bo‘lsin.



1.8 - rasm

Ta'rif. Skalyar maydonning berilgan M nuqtadagi gradienti deb, grad$u$ *simvol orqali belgilanadigan va quyidagi tenglikdan aniqlanadigan vektorga aytiladi.*

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec i + \frac{\partial u}{\partial y}\vec j + \frac{\partial u}{\partial z}\vec k. \qquad (1.1)$$

Sath sirtda M nuqtadan o‘tuvchi ixtiyoriy biror L chiziq joylashgan bo‘lib uning parametrik tenglamasi $\vec r(t) = x(t)\vec i + y(t)\vec j + z(t)\vec k$ ko‘rinishda bo‘lsin. Radius vektor differensiali $d\vec r(t) = \vec r(t+dt) - \vec r(t)$ L chiziq bo‘ylab cheksiz kichik siljishni aniqlaydi. Sath sirtda $du = 0$ bo‘lganligidan

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = (\text{grad}u, d\vec r) = 0.$$

Bundan $\text{grad}u \perp d\vec r$ kelib chiqadi. L chiziqning ixtiyoriyligidan M nuqtadagi gradient sath sirtga ortogonal ekanligi kelib chiqadi (1.8 - rasm).

Yo‘nalish bo‘yicha hosila bilan gradient orasidagi bog‘lanish. Yo‘nalish bo‘yicha hosilani grad$u$ orqali quyidagicha yozishimiz mumkin

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \left(\text{grad}\, u, \vec\ell^{\,0}\right) = |\text{grad}\, u|\cos\varphi \qquad (1.2)$$

bunda $\vec\ell^{\,0}$ vektor $\vec\ell$ yo‘nalishidagi birlik vektor bo‘lib u quyıdagiga teng

$$\vec\ell^{\,0} = \frac{\vec\ell}{|\vec\ell|} = \vec i\cdot\cos\alpha + \vec j\cdot\cos\beta + \vec k\cdot\cos\gamma$$

φ grad$u$ va $\vec\ell^{\,0}$ vektor orasidagi burchak (1.9 - rasm). Demak, biror nuqtada olingan yo‘nalish bo‘yicha hosila gradientning shu yo‘nalishdagi proyeksiyasiga teng ekan.

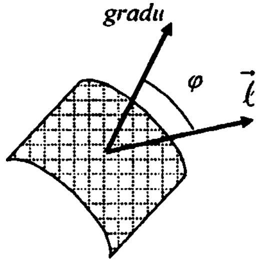
Agar $\text{grad}u = 0$ bo‘lsa $\frac{\partial u}{\partial \ell} = 0$ bo‘ladi. Agar $\text{grad}u \neq 0$ bo‘lsa. gradient yo‘nalishi bilan mos kelmagan barcha vektorlar uchun $\frac{\partial u}{\partial \ell} < |\text{grad}\, u|$ ekanligi kelib chiqadi.

$M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadagi urinma tekislik tenglamasi grad$u$ va $\vec{r}-\vec{r}_0=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$ vektorlarning perpendikulyarligidan kelib chiqadi:

$$(\mathrm{grad}u,\vec{r}-\vec{r}_0)=0,$$

yoki

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0}\cdot(x-x_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y_0}\cdot(y-y_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z_0}\cdot(z-z_0)=0$$



1.9 - rasm

Gradientning xossalari:

1) $u(M)$ skalyar maydon biror M_0 nuqtada eng tez o‘sadigan yo‘nalishi grad$u(M_0)$ yo‘nalishi bilan mos keladi va u $|\mathrm{grad}u(M_0)|$ ga teng.

2) $u(M)$ skalyar maydon biror M_0 nuqtada eng tez kamayadigan yo‘nalishi grad$u(M_0)$ yo‘nalishiga teskari yo‘nalish bilan mos keladi va bu kamayish tezligi $|\mathrm{grad}u(M_0)|$ ga teng.

3) grad$u(M_0)$ $u(M)$ maydonning M_0 nuqtasidan o‘tadigan sath sirtga o‘tkazilgan normal bo‘ylab yo‘nalgan.

Bu xossalarni tekshiramiz.

1. Agar $\cos\varphi=1$ bo‘lsa, (1.2) formuladan $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$ ning qiymati $|\mathrm{grad}u(M_0)|$ ga tengligi kelib chiqadi. Ya’ni grad$u(M_0)$ va $\vec{\ell}$ vektor orasidagi burchak nolga teng.

2. $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$ ning eng kichik qiymatiga $\cos\varphi=-1$ bo‘lganda erishadi. Ya’ni $\varphi=\pi$ bo‘ladi va grad$u(M_0)$ bilan $\vec{\ell}$ vektor parallel bo‘lib qarama - qarshi yo‘nalgan bo‘ladi.

3. Biz yuqorida bu xossani isbot qildik.

1 – 3 xossalar gradientning **invariantlik** (koordinatalar sistemasiga bog‘liq bo‘lmagan) ta’rifini beradi. Ya’ni koordinatalar sistemasining qanday bo‘lishidan qatiy nazar, gradient skalyar maydonning eng tez o‘sadigan yo‘nalishini va miqdorini aniqlaydi: $|\mathrm{grad}u|=\max\left(\frac{\partial u}{\partial \ell}\right)$.

Shuni aytib o‘tish kerakki gradient vektor funksiya bo‘lib u faqat skalyar funksiyadan olinadi.

Gradientning differensial xossalari:

1) $\mathrm{grad}(u+v)=\mathrm{grad}u+\mathrm{grad}v$,

2) $\mathrm{grad}(uv)=\mathrm{grad}u\cdot v+u\cdot\mathrm{grad}v$,

3) $\mathrm{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\cdot\mathrm{grad}u-u\cdot\mathrm{grad}v}{v^2}$,

4) $\mathrm{grad}f(u)=f'_u\cdot\mathrm{grad}u$,

5) $\mathrm{grad}\,r=\dfrac{\vec r}{r}$,

6) $\mathrm{grad}(\vec a,\vec r)=\vec a,\ \vec a=const.$

Bu xossalarning to'g'riligini tekshiramiz.

$$\mathrm{grad}(u+v)=\{(u+v)'_x,(u+v)'_y,(u+v)'_z\}=$$
$$=\{u'_x,u'_y,u'_z\}+\{v'_x,v'_y,v'_z\}=\mathrm{grad}u+\mathrm{grad}v$$

bo'lganligi uchun 1) xossa o'rinlidir. 2), 3) va 4) xossalarning to'g'riligini tekshirish shu kabi amalga oshiriladi. 5) xossani tekshirish uchun $\vec r=\{x,y,z\}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, va shuning uchun $r'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$. Xuddi shuningdek, $r'_y=\dfrac{y}{r}, r'_z=\dfrac{z}{r}$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\mathrm{grad}r=\{r'_x,r'_y,r'_z\}=\left\{\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right\}=\frac{1}{r}\{x,y,z\}=\frac{\vec r}{r}$$

bo'ladi. $\mathrm{grad}(\vec a\cdot\vec r)=\mathrm{grad}(a_1x+a_2y+a_3z)=\{a_1,a_2,a_3\}$ tenglikdan 6) xossa kelib chiqadi.

1- *misol.* $u=x-2y+3z$ skalyar maydon gradientini toping.

▷ (1.1) formulaga asosan

$$\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec i+\frac{\partial u}{\partial y}\vec j+\frac{\partial u}{\partial z}\vec k=1\cdot\vec i-2\cdot\vec j+3\vec k \ ◀$$

2 – *misol.* $u(r)=r^3$ maydonning $A(1,2,2)$ nuqtadagi maksimal o'sish qiymatini toping.

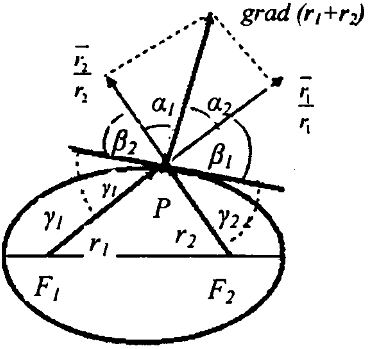
▷Maydon gradientini topamiz:

$$\mathrm{grad}\,u(r)=\mathrm{grad}\,r^3=3r^2\,\mathrm{grad}r=3r^2\frac{\vec r}{r}=3r\vec r.$$

Maydonning A nuqtadagi maksimal o'sish qiymati

$$|\mathrm{grad}\,u(r)|_A=|3r\vec r|_A=3r^2\Big|_A=3\left(x^2+y^2+z^2\right)\Big|_A=27$$

ga teng bo'ladi. ◀



1.10 - rasm

3-*misol.* Ellipsning optik xossasini isbot qiling: ellipsning biror fokusidan chiqqan nur ellipsdan qaytgandan so‘ng ellipsning ikkinchi fokusidan o‘tadi.

▷ F_1, F_2 nuqtalar ellipsning foluslari bo‘lsin (1.10–rasm): $\vec{r}_1 = \overline{F_1P}, \vec{r}_2 = \overline{F_2P}$. $u(P) = r_1 + r_2$ skalyar maydonni ko‘raylik. Ellipsning ta’rifiga ko‘ra $u(P) = r_1 + r_2 = const$ bo‘lganda P nuqta ellipsda yotadi. Ya’ni ellips $u(P)$ skalyar maydonning sath chizig‘idir. Shuning uchun $\mathrm{grad}(r_1 + r_2) = \frac{\vec{r}_1}{r_1} + \frac{\vec{r}_2}{r_2}$ P nuqtada ellipsning normali bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi. Shu bilan birga bu gradient $\frac{\vec{r}_1}{r_1}, \frac{\vec{r}_2}{r_2}$ vektorlardan tuzilgan parallelogrammning dioganali bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi. Bu vektorlar birlik vektorlar bo‘lgani uchun parallelogram rombdan iborat bo‘ladi va $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$ bo‘ladi. U holda $\angle\beta_1 = \angle\beta_2$ kelib chiqadi (bissektrissa urinmaga perpendikulyar). $\angle\gamma_1 = \angle\beta_1$, $\angle\gamma_2 = \angle\beta_2$ tengliklardan $\angle\gamma_1 = \angle\gamma_2$ kelib chiqadi. Ya’ni F_1 fokusdan chiqqan nur ellipsdan qaytgandan so‘ng F_2 fokusdan o‘tadi.◀

1.5. Sirt normalining yo‘naltiruvchi kosinuslari

Tenglamasi $F(x,y,z) = 0$ ko‘rinishda berilgan sirtni $F = F(x,y,z)$ skalyar maydonning sath sirti sifatida qarash mumkin. Bu maydonnig gradienti

$$\mathrm{grad}F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} = \vec{n}$$

berilgan sirtning ixtiyoriy nuqtasida normal bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi. Shuning uchun sirtga o‘tkasilgan normalning yo‘naltiruvchi kosinuslari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Demak, sirtga o'tkazilgan birlik normal vektorni qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\pm\frac{\mathrm{grad}F(x,y,z)}{|\mathrm{grad}F(x,y,z)|}.$$

Bu formulada ishorani tanlash sirtga o'tkazilgan normalning tanlanishiga qarab olinadi.

Izoh. $F(x,y,z)=0$ sirtning yo'naltiruvchi kosinuslari $F(x,y,z)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lib, xususiy hosilalar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan nuqtalardagina aniqlangan bo'ladi. Agar biror nuqtada xususiy hosilalar bir vaqtda nolga teng bo'lsa normal aniqlanmaydi.

Normali mavjud bo'lmagan sirtning nuqtalariga sirtning maxsus nuqtalari deyiladi. Masalan, konus sirtning uchi konus sirt uchun maxsus nuqtadir.

Sirt tenglamasi biror o'zgaruvchiga nisbatan oshkor ko'rinishda ifodalangan bo'lsin, masalan, $z=f(x,y)$. Buni quyidagicha yozish mumkin

$$z-f(x,y)=0$$

Demak, $F(x,y,z)=z-f(x,y)$ deb qarash mumkin, shuning uchun

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}=1,$$

bo'ladi. Demak, $z=f(x,y)$ ko'nishda berilgan sirtning yo'naltiruvchi kosinuslari

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}},\quad \cos\beta=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}}$$

ko'rinishda bo'ladi, yoki qisqacha

$$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\pm\frac{\operatorname{grad}(z-f(x,y))}{|\operatorname{grad}(z-f(x,y))|}.$$

Misol. $z=x^2+y^2$ paraboloidning tashqi tomoniga yo'nalgan birlik normal vektorni toping.

▷ $f(x,y)=x^2+y^2$ bo'lgani uchun, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2y,$ yo'naltiruvchi kosinuslari

$$\cos\alpha=\frac{2x}{\pm\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\ \cos\beta=\frac{2y}{\pm\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{4x^2+4y^2+1}}.$$

Paraboloidga o'tkazilgan tashqi normal Oz o'qi bilan o'tmas burchak tashkil qilgani uchun «-» ishorasini olamiz. Shunday qilib paraboloidga o'tkazilgan birlik normal vektor

$$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},$$

ko'rinishda bo'ladi.◀

Tayanch iboralar:

skalyar maydon, sath sirt, sath chizig'i, yo'nalish bo'yicha hosila, skalyar maydon gradient, sirt normali.

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday maydon skalyar maydon deyiladi?
2. Skalyar maydon gradienti nima?
3. Sath sirtning ixtiyoriy nuqtasidagi gradient qanday yo'nalgan bo'ladi?
4. Yo'nalish bo'yicha hosila gradient orqali qanday ifodalanadi?
5. Gradientning qanday xossalari bor?
6. Gradientning invariant ta'rifi nima?
7. Sirtga o'tkazilgan normal qanday aniqlanadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi maydonlarning sath chiziqlarini toping.

a) $u=y-x$; b) $u=\frac{\sqrt{x}}{y}$

2. Quyidagi maydonlarning berilgan nuqtalardan o'tuvchi sath chiziqlarini toping.

a) $u=\sqrt{x^2+y^2+2}$, $M(3,5)$; b) $u=4x^2-y^2$, $M(2,-1)$.

3. Quyidagi maydonlarning sath sirtlarini toping.

a) $u=\dfrac{(\vec{a},\vec{r})}{(\vec{b},\vec{r})}$; b) $u=\ln|\vec{r}|$ c) $u=\dfrac{(\vec{i},\vec{r})}{(\vec{j},\vec{r})}$ d) $u=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{z^2}}$

4. Quyidagi masalalarda berilgan funksiya uchun $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtaga yo'nalgan hosilasini toping.

a) $u=x^2y+xz^2-2$, $M_0(1,1,-1)$, $M_1(2,-1,3)$

b) $u=xe^y+ye^x-z^2$, $M_0(3,0,2)$, $M_1(4,1,3)$

5. $u=x\sin(x+y)$, funksiyaning $M\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$ nuqtadagi $\vec{\ell}=(-1;0)$, vektor yo'nalishi bo'yicha hosilasini toping.

2. Vektor maydon

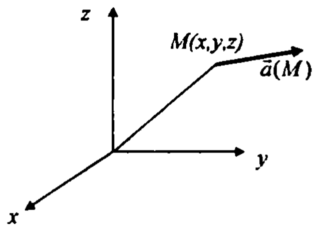
- ***Vektor maydon tushunchasi.***
- ***Vektor chiziqlari. Vektor chiziqlarining differensial tenglamasi.***

2.1. Vektor maydon tushunchasi

Yaqqol ko'zga tashlanadiga vektor maydonlardan biri suyiqlikning tezliklar maydonidir. Fazoning biror D qismida suyuqlik harakat qilayotgan bo'sin. Ixtiyoriy $M\in D$ nuqtada har xil vaqtlarda ham suyuqlik tezligi bir xil $v(M)$ bo'lsin. Bunday harakatga stasionar harakatga ega deyiladi. Aynan olingan bir nuqtada tezlik bir xil bo'lgani bilan D ning boshqa-boshqa nuqtalarida tezliklar har xildir. Shunday qilib, D da suyuqlikning tezliklar maydoni berilgan deyiladi.

Agar uch o'lchovli fazoda to'g'ri dekart koordinatalar sistemasi $Oxyz$ berilgan bo'lsa, vektor maydonni uch o'zgaruvchili vektor funksiya ko'rinishda ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, koordinatalar yordamida nuqtani va u yordamida vektor maydonni aniqlash mumkin. $Oxyz$ koordinatalar sistemasida $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vektorlar bazis vektorlar bo'lsin. U holda $\vec{a}(M)$ vektor maydonni

$$\vec{a}(M)=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$$



2.1 - rasm

ko'rinishda ifodalash mumkin (2.1 – rasm). Bu yerda a_x, a_y, a_z lar (x,y,z) ning skalyar funksiyalaridir. Bu funksiyalarning $M(x,y,z)$ nuqtadagi qiymatlari $\vec{a}(M)$ vektorning $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisdagi koordinatalaridan iborat bo'ladi.

a_x, a_y, a_z larning har birini skalyar maydon sifatida qarash mumkin. Skalyar maydon kabi agar vektor maydon vaqtga bog'liq bo'lmasa bunday maydonlarga stasionar maydonlar deyiladi. Agar vektor maydon vaqtga bog'liq bo'lsa nostasinar maydon deyiladi.

Agar biror to'g'ri dekart koordinatalar sistemasi $Oxyz$ tanlanganda vektor maydon z ga (x yoki y) bog'liq bo'lmasa, bunday maydon yassi maydon deyiladi. Bunday maydonlarda vektor xOy tekislikka parallel bo'ladi, ya'ni bunday koordinatalar sistemasida $a_z(x,y,z) \equiv 0$ bo'ladi.

Misol. Biror jism biror o'q atrofida o'zgarmas $\vec{\omega}$ burchak tezlik bo'yicha aylanayotgan bo'lsin. Bu holda aylanayotgan jism nuqtalari tezligi $\vec{v}(M) = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ ga teng bo'ladi; $\vec{\omega}$- aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan vektor, $\vec{r}$- nuqtaning radius vektori. Shunday qilib, vektor maydon vektor argumentli vektor funksiya orqali berilgandir $\vec{v}(\vec{r}) = [\vec{\omega}, \vec{r}]$.

Koordinatalar sistemasini shunday tanlaylikki unda jismning aylanish o'qi Oz o'qi bilan mos kelsin va $\vec{\omega}$ va $\vec{k}$ vektor yo'nalishlari mos kelsin. U holda $\vec{\omega} = |\vec{\omega}|\vec{k}$ bo'ladi. Nuqtaning radius vektori $\vec{r} = \{x, y, z\}$. U holda

$$v(x,y) = [\vec{\omega}, \vec{r}] = |\vec{\omega}|(x\vec{j} - y\vec{i})$$

bo'ladi. Demak, vektor maydon yassi maydon, chunki maydonning uchinchi koordinatasi nolga teng va birinchi va ikkinchi koordinatalar esa z ga bog'liq emas.

Silindrik koordinatalari sistemasida $Or\varphi z$ $\vec{a}(M)$ vektor maydon berilgan bo'lsin. Agar vektor maydon har bir nuqtada φ ga bog'liq bo'lmasa, o'qqa simmetrik maydon deyiladi. O'qqa simmetrik maydonda $\vec{a}(M)$ vektor M nuqta va Oz o'qidan o'tadigan tekislikka parallel bo'ladi.

Agar berilgan $\vec{a}(M)$ vektor maydon o'zining aniqlanish sohasining ixtiyoriy nuqtasida uzunligi faqat $r=OM$ masofaga (O koordinata boshi) va yo'nalishi O va M nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan bo'lsa, bunday maydon markaziy maydon deyiladi. Bunday maydonni

$$\vec{a}(M) = a(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin ($r = |\vec{r}| = OM$).

Misol. Fazoda kuchni xarakterlovchi maydon kuch maydoni deyiladi. Masalan, massasi m_0 ga teng bo'lgan material nuqtaning tortishish kuchi. Faraz qilaylik bu nuqta koordinatalar boshida joylashgan bo'lsin. Nyuton qonuniga ko'ra massasi m ga teng M nuqtada joylashgan radius vektori $\vec{r}$ bo'lgan material nuqtaga ta'sir qiluvchi kuch

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m m_0}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

ga teng bo'ladi. Bu yerda G – gravitasion o'zgarmas. Bunday kuch maydonning markaziy maydonligi o'z-o'zidan ravshan.

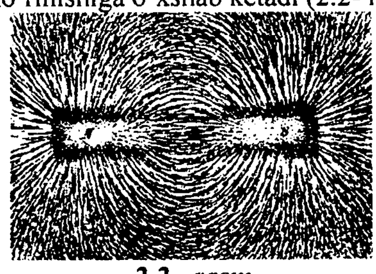
Nuqtaviy elektr zaryadlarining o'zaro ta'siri natijasida hosil bo'ladigan maydon ham markaziy maydon bo'ladi. Nuqtaviy zarjad q_0 koordinata boshida joylashgan bo'lsin. Kulon qonuniga ko'ra radius vektori $\vec{r}$ ga teng bo'lgan q zarjadga ta'sir qiluvchi kuch

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda ε_0 dielektrik konstanta.

2.2. Vektor chiziqlari. Vektor chiziqlarining differensial tenglamasi

Vektor maydonlarni grafik tasvirlash maqsadida vektor chiziqlar (yoki kuch chiziqlar) tushunchasi kiritilgan. Bunday tasvirlash maktab fizik tajribalaridagi magnit maydonining temir kukunlari ta'siri ko'rinishiga o'xshab ketadi (2.2- rasm).



2.2 - rasm

Ta'rif. $\vec{a} = \vec{a}(M)$ *vektor maydondagi biror L egri chiziqning har bir nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning yo'nalishi maydonning shu nuqtadagi yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa, bu holda bu L egri chiziq* $\vec{a} = \vec{a}(M)$ *vektor maydonning vektor chizig'i (yoki kuch chizig'i) deb ataladi* (2.3 - rasm).

Masalan, biror o'q atrofida aylanma harakat qilayotgan qattiq jism tezliklar maydonining vektor chiziqlari markazi aylanish o'qida joylashgan konsentrik aylanalardan iborat boladi. Statsionar harakatdagi suyuqlik tezliklari maydonining vektor chiziqlari esa suyuqlik zarrachalarining traektoriyasidan iborat bo‘ladi. Agar $\vec{a}(M)$ elektr maydoni bo‘lsa, u holda vektor chiziqlar bu maydonning kuch chiziqlari bo‘ladi.

2.3 - rasm

Amalda vektor chiziqlarni aniqlash uchun odatda avval ularning differensial tenglamalari sistemasi deb ataladigan sistema tuziladi va bu sistemani yechib, integral egri chiziqlarning (yani vektor chiziqlarning) grafiklari yasaladi. Vektor chiziqlarning differensial tenglamalari sistemasi quyidagicha tuziladi. L chiziq $\vec{a}$ vektor maydonning biror vektor chizig‘i bo‘lsin (2.3 - rasm). Ravshanki , $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ vektor L vektor chiziq urinmasi bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi. Shuning uchun $\vec{a}$(M) va $d\vec{r}$ vektorlar o‘zaro kollinear vektorlardir.

Agar $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ bo‘lsa, proeksiyalari bilan berilgan ikki vektorning o‘zaro kollinearlik shartiga binoan

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z} \tag{2.1}$$

bo‘ladi. Bu sistemaga *vektor chiziqlarning differensial tenglamalari sistemasi* deyiladi. Bu yerda $a_x = a_x(x,y,z)$ $a_y = a_y(x,y,z)$ va $a_z = a_z(x,y,z)$ funksiyalar $\vec{a}(M) = \vec{a}(x,y,z)$ vektor- funksiyaning mos ravishda x, y va z o‘qlaridagi proyeksiyalarini ifodalaydi.

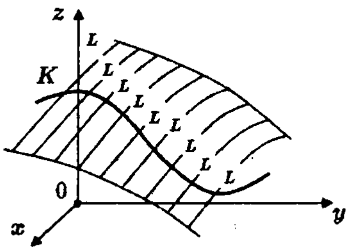
Yassi vektor maydonlar uchun vektor chiziqlarning differensial tenglamasi

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y}, \quad dz = 0$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$\vec{a}$ vektor noldan farqli bo‘lsin. U holda differensial tenglamalar sistemalari nazariyasidagi «mavjudlik teoremasi» ga tayanib, qaralayotgan soha vektor chiziqlar bilan to‘lishadi va uning har bir nuqtasidan bitta va faqat bitta vektor chizig‘i o‘tadi. Vektor chiziqlar o‘zaro kesishmaydi.

Vektor sirti undagi har bir M nuqtaga mos $\vec{a}(M)$ vektorning shu nuqtada urunuvchi tekislikda yotishi bilan xarakterlanadi. Agar qaralayotgan sohada vektor chizig‘idan farqli biror K egri chiziq olib, uning har bir nuqtasi orqali vektor chizig‘i o‘tkazilsa, bu chiziqlarning geometrik o‘rni *vektor sirtni* beradi (2.4 – rasm). Agar olingan «yo‘naltiruvchi» chiziq yopiq bo‘lsa, u holda hosil bo‘lgan vektor sirt



2.4 - rasm

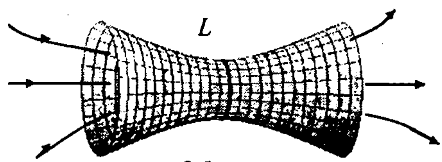
trubkasimon vektor sirt deyiladi. Uni *vektor trubkasi* ham deyiladi (2.5 - rasm).

1-*misol.* $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vektor maydonning vektor chiziqlari topilsin.

▷ Ravshanki, $r_x = x$, $r_y = y$ va $r_z = z$. Demak, izlanayotgan vektor chiziqlarning differensial tenglamalari sistemasi $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ bo‘ladi.

Bu sistema quyidagi sistemaga teng kuchli.

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \\ \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \end{cases}$$



2.5 - rasm

Ravshanki,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = \ln cy \Rightarrow y = cx.$$

Shunga o‘xshash,

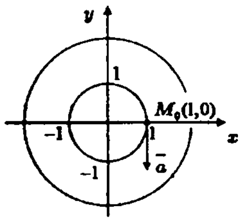
$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \Rightarrow z = c_2 x.$$

Bu yerdan

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{c_1} = \frac{z}{c_2}.$$

Shunday qilib, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vektor maydonning vektor chiziqlari koordinatalar boshida o‘tgan, yo‘naltiruvchi vektori $\vec{e} = \{1, c_1, c_2\}$ bo‘lgan ikki parametrli fazoviy to‘g‘ri chiziqlar oilasidan iborat.◀

2- *misol.* $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$ vektor maydonning $M_0(1,0)$ nuqtadan o‘tuvchi vektor chizig‘ini toping.



2.6 - rasm

▷ Vektor chiziqlar oilasining differensial tenglamasi

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Tenglamada o‘zgaruvchilarni ajratib,

$$xdx + ydy = 0,$$

tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimi $x^2+y^2=C^2$ bo'ladi. Integral chiziq $M_0(1,0)$ nuqtadan o'tishligidan C = 1 kelib chiqadi (2.6 - rasm). ◀

3-*misol.* $\vec{a}=[\vec{c},\vec{r}]$ vektor maydonning vektor chizig'ini toping. $\vec{c}$ – o'zgarmas vektor.

$$\triangleright\ \vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}, \qquad \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

bo'lgani uchun

$$\vec{a}=[\vec{c},\vec{r}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ c_1 & c_2 & c_3\\ x & y & z\end{vmatrix}=(c_2z-c_3y)\vec{i}+(c_3x-c_1z)\vec{j}+(c_1y-c_2x)\vec{k}$$

(2.1) tenglamaga asosan

$$\frac{dx}{c_2z-c_3y}=\frac{dy}{c_3x-c_1z}=\frac{dz}{c_1y-c_2x}.$$

Birinchi kasrni x ga, ikkinchi kasrni y ga , uchunchi kasrni z ga ko'paytiramiz va proporsiyaning xossasiga asosan quyidagini olamiz

$$\frac{dx}{c_2z-c_3y}=\frac{dy}{c_3x-c_1z}=\frac{dz}{c_1y-c_2x}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0},$$

bundan

$$xdx+ydy+zdz=0$$

$$x^2+y^2+z^2=A_1 \qquad A_1=const>0$$

Endi birinchi kasrni c_1 ga , ikkinchi kasrni c_2 ga, uchunchi kasrni c_3 ga ko'paytiramiz va yana proporsiyaning xossasiga asosan topamiz

$$\frac{dx}{c_2z-c_3y}=\frac{dy}{c_3x-c_1z}=\frac{dz}{c_1y-c_2x}=\frac{c_1dx+c_2dy+c_3dz}{0}\Rightarrow$$

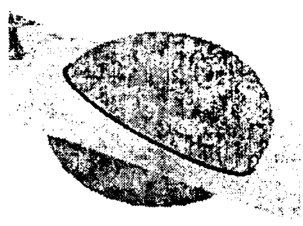
$$c_1dx+c_2dy+c_3dz=0\ \Rightarrow$$

$$c_1x+c_2y+c_3z=A_2, \qquad A_2=const$$

Biz izlagan vektor chiziqlari

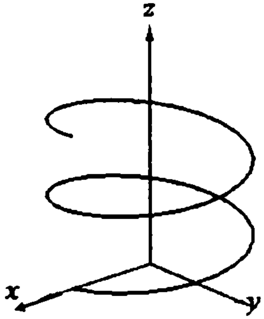
$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2+z^2=A_1\\ c_1x+c_2y+c_3z=A_2\end{aligned}\right\}.$$

Demak, berilgan vektor maydonning vektor chiziqlari markazi koordinata boshida bo'lgan sferalar bilan tekisliklarning kesishidan hosil bo'lgan aylanalardan iborat (vektor chiziqlardan biri 2.7 - rasmda keltirilgan).◀



2.7 - rasm

4-*misol.* Vektor $\vec{a}=-y\vec{i}+x\vec{j}+b\vec{k}$ maydonning (1,0,0) nuqta orqali o'tuvchi vektor chizig'ini toping.



2.8 - rasm

$\triangleright -\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b}$,

bundan quyidagini olamiz

$$x^2+y^2=C_1, \qquad C_1>0,$$

t- parametr kiritsak

$$x=\sqrt{C_1}\cos t, \qquad y=\sqrt{C_1}\sin t,$$

Ikkinchi tenglamani yechamiz

$$\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{C_1}\cos t dt}{\sqrt{C_1}\cos t}=\frac{dz}{b} \Rightarrow$$

$$dz=bdt \Rightarrow z=bt+C_2$$

Demak, vektor chiziqlarning parametrik tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} x&=\sqrt{C_1}\cos t\\ y&=\sqrt{C_1}\sin t\\ z&=bt+C_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

(1,0,0) nuqtada t parametr nolga teng bo'ladi. (2.2) tenglamadan quyidagini olamiz:

$$\left.\begin{aligned} 1&=\sqrt{C_1},\\ 0&=\sqrt{C_1}\cdot 0\\ 0&=C_2 \end{aligned}\right\}$$

bundan $C_1=1$, $C_2=0$ ni topamiz. Demak, vektor maydonning (1,0,0) nuqta orqali o'tuvchi vektor chizig'i vint chizig'idan iborat ekan (2.8 - rasm)

$$\left.\begin{aligned} x&=\cos t\\ y&=\sin t\\ z&=bt \end{aligned}\right\}$$

Maydonning vektor chiziqlari vint chiziqlaridan iboratdir.◀

Tayanch iboralar:

Vektor maydon, vektor maydonning vektor chiziqlari, vektor chiziqlarning differensial tenglamasi.

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday maydon vektor maydon deyiladi?
2. Qanday maydon stasionar vektor maydon deyiladi?
3. Vektor maydon bilan skalyar maydonning farqi nimada?
4. Qanday chiziqlar vektor chiziqlar deyiladi?
5. Nuqtaviy zaryadning vektor chiziqlari qanday bo'ladi?
6. Vektor chiziqlar qanday topiladi?
7. Yassi vektor maydonda vektor chiziqlari qanday topiladi?
8. Biror nuqtadan o'tadigan vektor chiziq qanday topiladi?
9. Trubkasimon vektor sirt qanday sirt?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\vec{a} = \{x, y\}$ vektor maydonning vektor chiziqlarini toping.

2. $u = x^2 - y^2$ skalyar maydon gradientining vektor chiziqlarini toping.

3. $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$ skalyar maydon gradientining $M(0,1,1)$ nuqtadan o'tadigan vektor chiziqlarini toping.

4. $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}$ vektor maydonning (1,0,0) nuqtadan o'tuvchi vektor chiziqlarini toping.

5. $\vec{v}$ tezlikda harakatlanayotgan nuqtaviy zaryad fazoda $\vec{B} = k[\vec{v}, \vec{r}]/r^2$ magnit maydonini hosil qiladi. Bu yerda $\vec{r}$ kuzatish nuqtasidan zaryad joylashgan nuqtaga yo'nalgan vektor, k biror koeffitsiyent. Zaryad Oz o'qi bo'ylab harakat qilayotgan bo'lsa $\vec{B}$ maydonning vektor chiziqlarini toping.

3. Vektor maydon oqimi

- ***Suyuqlikning oqimi masalasi.***
- ***Oqim tushunchasi va uning yozilish shakllari.***
- ***Oqimni hisoblash.***
- ***Vektor maydon divergensiyasi.***
- ***Yopiq sirt bo'yicha oqimning fizik ma'nosi.***
- ***Ostrogradskiy - Gauss formulasi.***
- ***Divergensiyaning invariant ta'rifi.***

Bizga fazoda biror sirt berilgan bo'lsin. Odatda sirt yopiq yoki ochiq bo'lishi mumkin. Sirt ochiq yoki yopiq bo'lishidan qat'iy nazar uning ikki tomoni bo‘ladi. Agar sirtning har bir nuqtasida birlik normal $\vec{n}(M)$ vektor tanlangan bo‘lib u M nuqtaning uzliksiz funksiyasi bo‘lsa, bunday sirtni *orientirlangan* deb ataymiz (3.1 – rasm). Lekin sirt har doim ham ikki tomonli bo‘lavermaydi, masalan, Myobius sirti bir tomonli sirtdir [2]. Biz faqat ikki tomonli sirtlarni qaraymiz.

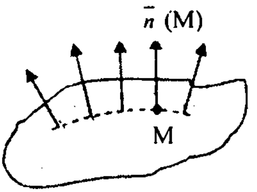
Sirtga o‘tkazilgan normalning yo‘nalishi qarama-qarshi tomonga o‘tkazilganda sirtning orientasiyasi o‘zgarganligini bildiradi va sirtning qarshi tomoni tanlanganligini aniqlaydi.

Vektor maydon oqimi tushunchasiga olib keladigan suyuqliklar oqimini ko‘raylik.

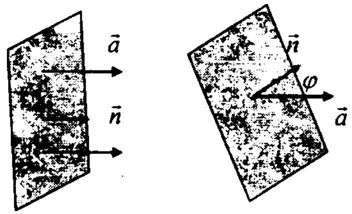
3.1. Suyuqlikning oqimi masalasi

Fazoning biror qismida suyuqlik oqayotgan bo‘lib, uning tezligi vaqtga bog‘liq bo‘lmasdan faqat fazoning nuqtasiga bo‘g‘liq bo‘lsin: $\vec{a}=\vec{a}(M)$. Biror orientirlangan σ sirtdan tanlangan yo‘nalish bo‘yicha o‘tadigan suyuqlik miqdorini (hajmini) topishni ko‘raylik.

Avval sodda holni ko‘raylik. Birlik normal vektori $\vec{n}$ bo‘lgan sirt tekis bo‘lib, sirtning barcha nuqtalarida suyuqlik tezligi bir xil bo‘lsin (3.2 – rasm).



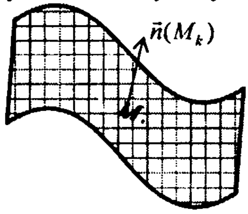
3.1-rasm



3.2-rasm

Yassi sirtdan birlik vaqt ichida o‘tuvchi oqim miqdori asosi sirt yuzidan yasovchisi $|\vec{a}|$ bo‘lgan silindrdan iborat bo‘ladi. Agar $\vec{a}$ bilan $\vec{n}$ ning yo‘nalishlari mos kelsa suyuqlik hajmi $|\vec{a}|\cdot\sigma=(\vec{a},\vec{n})\sigma$ ga teng bo‘ladi (3.2 – rasmning chap bo‘lagi). Agar $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{n}$ biror φ burchak tashkil qilsa silindr balandligi $|pr_{\vec{n}}\vec{a}|=(|\vec{a},\vec{n}|)=|\vec{a}||\vec{n}|\cos\varphi$ ga teng bo‘lib, suyuqlik hajmi $|(\vec{a},\vec{n})|\cdot\sigma$ ga teng bo‘ladi. Har ikki holda ham suyuqlik hajmi $|(\vec{a},\vec{n})|\cdot\sigma$ ga teng bo‘ladi. Modul belgisini tashlab yuborsak $(\vec{a},\vec{n})\cdot\sigma$ miqdorga σ sirtdan o‘tadigan suyuqlik oqimi deyiladi.

Agar $\vec{a}$ bilan $\vec{n}$ orasidagi burchak o‘tkir bo‘lsa, suyuqlik $\vec{n}$ vektor yo‘nalishi bo‘ylab oqadi deymiz; bu holda $(\vec{a},\vec{n})>0$ va oqim suyuqlik miqdoriga teng bo‘ladi. Agar $\vec{a}$ bilan $\vec{n}$ orasidagi burchak o‘tmas bo‘lsa suyuqlik $\vec{n}$ vektor yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda oqadi deymiz va bunda $(\vec{a},\vec{n})<0$ bolib oqim va suyuqlik miqdorlari ishoralari bilan farq qiladi. Agar $\vec{a}$ bilan $\vec{n}$ orasidagi burchak o‘zaro perpendikulyar bo‘lsa suyuqlik σ yassi sirt bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi va oqim nolga teng bo‘ladi.



3.3 - rasm

Endi umumiy holni ko‘raylik. Ixtiyoriy σ sirtdan o‘tadigan suyuqlik oqimini topish uchun sirtning yuzalari $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$ ga teng bo‘lgan qismlarga ajratamiz (3.3 – rasm). Har bir bo‘lakdan ixtiyoriy M_k nuqtani olamiz. Har bir bo‘lakchadagi suyuqlik tezligini taqriban o‘zgarmas deb qaraymiz: $\vec{a}=\vec{a}(M_k)$. Shu bilan birga bo‘lakchani yassi deb qaraymiz va $\vec{n}(M_k)$ normal vektorga perpendikulyar deb olamiz. U holda $\Delta\sigma_k$ bo‘lakchadan o‘tadigan suyuqlik oqimi taqriban

$$Q_{\Delta\sigma_k} \approx \left(\vec{a}(M_k),\vec{n}(M_k)\right)\cdot\Delta\sigma_k$$

ga teng bo‘ladi. To‘la sirtdan o‘tadigan oqim esa

$$Q=\sum_{k=1}^{n} Q_{\Delta\sigma_k} \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{a}(M_k),\vec{n}(M_k)\right)\cdot\Delta\sigma_k,$$

ga teng bo‘ladi. $d=\max\{\Delta\sigma_1,...,\Delta\sigma_n\}$ kichiklashgan sari aniqlik oshib boradi. Oqimning aniq qiymati esa

$$Q=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{a}(M_k),n(M_k)\right)\cdot\Delta\sigma_k$$

limitdan topiladi. Bu limit $\left(\vec{a}(M_k),n(M_k)\right)$ skalyar funksiyadan olingan 1- tur sirt integraliga tengdir. Shunday qilib sirtdan o‘tadigan oqim

$$Q=\iint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma=\iint_{\sigma}a_n d\sigma \qquad (3.1)$$

formula orqali topiladi.

Quyidagilarni nazarda tutaylik.

- agar $Q>0$ bo‘lsa, $\vec{n}$ normal yo‘nalishi bo‘yicha suyuqlik miqdori $-\vec{n}$ yo‘nalishdan o‘tadigan suyuqlik miqdoridan ko‘p bo‘ladi;
- agar $Q<0$ bo‘lsa $\vec{n}$ normal yo‘nalishi bo‘yicha suyuqlik miqdori $-\vec{n}$ yo‘nalishdan o‘tadigan suyuqlik miqdoridan kam bo‘ladi;

➢ agar $Q=0$ bo'lganda $\vec{n}$ normal yo'nalishi va unga qarshi yo'nalishlardagi suyuqlik miqdorlari teng bo'ladi.

(3.1) formuladagi integral $(\vec{a},\vec{n})$ skalyar funksiyadan olingan 1 – tur sirt integralidan iborat. Bu integralni $\vec{a}$ vektor funksiyadan olingan 2 - tur sirt sirt integrali deb ham yuritiladi. Ixtiyoriy vektor funksiyaning oqimi tushunchasi shu tarzda kiritiladi.

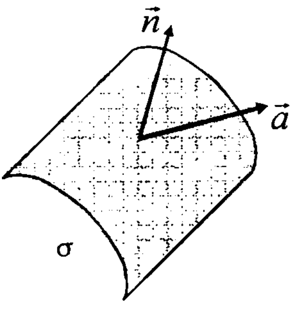
3.2. Oqim tushunchasi va uning yozilish shakllari

Vektor maydonning orientirlangan σ sirtdan o'tadigan oqimi deb

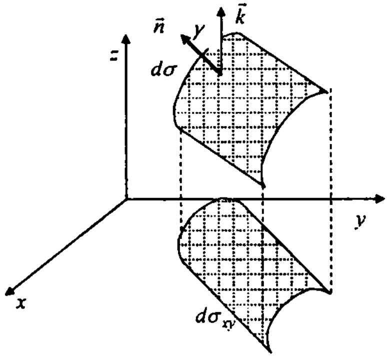
$$Q=\iint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma=\iint_{\sigma}a_n d\sigma \qquad (3.2)$$

formuladan aniqlanadigan miqdorga aytiladi.

Bu formulada $\vec{n}$ simvol bilan σ sirt normalining orti belgilangan, a_n esa $\vec{a}$ vektorning $\vec{n}$ normal vektor yo'nalishidagi proeksiasini bildiradi (3.4 – rasm).



3.4 - rasm



3.5 - rasm

Sirtning orientasiyasi o'zgarganda $\vec{n}$ vektorni $-\vec{n}$ vektorga almashtirish kerak, ya'ni oqim ishorasini o'zgartiradi.

Oqimning yozilish shakllarini keltiramiz.

1) α,β,γ orqali $\vec{n}$ vektorning mos ravishda Ox, Oy, Oz koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchaklarini belgilaylik. U holda $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ yo'naltiruvchi kosinuslar $\vec{n}$ vektorning komponentalari bo'ladi: $\vec{n}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Agar $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ bo'lsa, oqim formulasi

$$Q = \iint_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})d\sigma = \iint_{\sigma} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)d\sigma \qquad (3.3)$$

ko'rinishda bo'ladi.

2) yuza elementi $d\sigma$ ni va uning Oxy tekislikdagi proeksiyasi $d\sigma_{xy}$ ni ko'raylik (3.5 – rasm). $d\sigma$ bilan Oxy tekislik orasidagi burchak ularning normal vektorlari $\vec{n}$ va $\vec{k}$ orasidagi burchak bilan bir xil, ya'ni γ ga teng. Shuning uchun

$$\cos\gamma d\sigma = pr_{Oxy} d\sigma = d\sigma_{xy}.$$

Xuddi shuningdek,

$$\cos\beta d\sigma = pr_{Oxz} d\sigma = d\sigma_{xz}, \quad \cos\alpha d\sigma = pr_{Oyz} d\sigma = d\sigma_{yz},$$

bo'ladi. U holda,

$$Q = \iint_{\sigma} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)d\sigma = \iint_{\sigma} a_x d\sigma_{yz} + a_y d\sigma_{xz} + a_z d\sigma_{xy} \qquad (3.4)$$

3) yuza elementi vektorini kiritaylik: $d\vec{\sigma} = \{d\sigma_{yz}, d\sigma_{xz}, d\sigma_{xy}\}$. U holda (3.4) ga ko'ra

$$Q = \iint_{\sigma} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)d\sigma = \iint_{\sigma} (\vec{a}, d\vec{\sigma})$$

formula kelib chiqadi.

Shunday qilib oqimni topish formulalarini

$$Q = \iint_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})d\sigma = \iint_{\sigma} \vec{a} d\vec{\sigma} = \iint_{\sigma} a_x d\sigma_{yz} + a_y d\sigma_{xz} + a_z d\sigma_{xy} \qquad (3.5)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Oqimning (3.5) formuladagi 1- va 2- shakli oqimning vektor shakli, oxirgisi esa uning koordinatalardagi shaklidir.

Vektor maydon oqimining asosiy xossalari:

- Sirtning orientasiyasi o'zgarganda oqim ishorasi teskariga o'zgaradi:

$$\iint_{\sigma^+} (\vec{a},\vec{n})d\sigma = -\iint_{\sigma^-} (\vec{a},\vec{n})d\sigma.$$

Bu yerda σ^+ σ sirtning $\vec{n}$ normali bo'yicha tanlangan tomon, σ^- esa σ sirtning $-\vec{n}$ normali bilan tanlangan tomoni.

- Oqimning chiziqli xossasi:

$$\iint_{\sigma} (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\vec{n})d\sigma = \alpha\iint_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})d\sigma + \beta\iint_{\sigma} (\vec{b},\vec{n})d\sigma$$

- Additivlik xossasi:

Agar sirt bir necha sirtlardan iborat bo'lsa $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m$ u holda oqim har bir sirtdan o'tadigan oqimlar yig'indisiga teng:

$$Q=\sum_{k=1}^{m}\iint_{\sigma_k}(\vec{a},\vec{n})d\sigma.$$

3.3. Oqimni hisoblash

Oqimni hisoblashning bir necha usullari bilan tanishamiz.

1) oqimni $Q=\iint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma$ ***formula yordamida hisoblash.***

Oqimni bu formula bo'yicha hisoblashda $(\vec{a};\vec{n})$ va $d\sigma$ ni hisoblash kerak. Agar sirt tenglamasi $z=z(x,y)$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, $d\sigma=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_x)^3}dxdy$ ga teng bo'ladi.

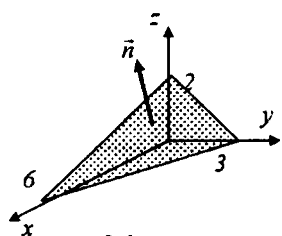
1- *misol.* Koordinatalar boshiga joylashtirilgan q zaryad kuchlanganlik $\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}$ maydonini hosil qiladi. Bu maydonning markazi koordinatalar boshida joylashgan radiusi R ga teng bo'lgan sfera sirtidan o'tuvchi oqimni toping. Normal vektor koordinata boshidan chiqqan.

▷ Sferaga o'tkazilgan $\vec{n}$ normal birlik vektor $\vec{r}$ radius vektorga kollinear bo'lgani uchun $\vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}$ bo'ladi. U holda $(\vec{E},\vec{n})=\left(\frac{q}{r^3}\vec{r},\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{q}{r^4}r^2=\frac{q}{r^2}$. Sfera sirtida $r=R$ bo'lgani uchun $(\vec{E},\vec{n})=\frac{q}{R^2}$. Sfera sirtining yuzi $\sigma=4\pi R^2$. Shuning uchun

$$Q=\iint_{\sigma}(\vec{E},\vec{n})d\sigma=\frac{q}{R^2}\iint_{\sigma}d\sigma=\frac{q}{R^2}\sigma=\frac{q}{R^2}4\pi R^2=4\pi q.◀$$

2 – *misol.* $\vec{a}=x\vec{i}-2y\vec{j}+z\vec{k}$ vektor maydonning $x+2y+3z=6$ tekisligining birinchi oktantada joylashgan yuqori qismi bo'yicha oqimni hisoblang.

▷ $x+2y+3z=6$ tekisligining tenglamasini kanonik shaklga keltirib shaklini chizamiz: $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$ (3.6 - rasm).



3.6. - rasm

Tekislikning normal vektorini aniqlaymiz: $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$

$\vec{a}$ vektor oqimini $Q=\iint\limits_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma$ formula bo'yicha hisoblaymiz

$$Q=\iint\limits_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma=\frac{1}{\sqrt{14}}\iint\limits_{\sigma}(x-4y+3z)d\sigma,$$

bu yerda
$$z=\frac{1}{3}(6-x-2y),\qquad d\sigma=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=$$
$$\sqrt{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}\,dxdy$$

Shunday qilib,

$$Q=\frac{1}{3}\iint\limits_{\sigma_{xy}}\left(x-4y+6-x-2y\right)dxdy=\frac{1}{3}\iint\limits_{\sigma_{xy}}(6-2y)dxdy=2\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{6-2y}(1-y)dx=$$
$$=2\int\limits_0^3(1-y)(6-2y)dy=0\ .\blacktriangleleft$$

2) oqimni uch tekislikka proeksiyalab hisoblash

Oqimni hisoblashda $Q=\iint\limits_{\sigma}a_x d\sigma_{yz}+a_y d\sigma_{xz}+a_z d\sigma_{xy}$ formuladan foydalanamiz. Bu yerda uchta

$$I_1=\iint\limits_{\sigma}a_x d\sigma_{yz},\ I_2=\iint\limits_{\sigma}a_y d\sigma_{xz},\ I_3=\iint\limits_{\sigma}a_z d\sigma_{xy}$$

integrallarni hisoblaymiz.

$I_1=\iint\limits_{\sigma}a_x(x,y,z)d\sigma_{yz}$ integralni hisoblash uchun:

1) integral ostidagi funksiyada x ni sirt tenglamasini $x=x(y,z)$ bilan almashtiramiz.

2) $d\sigma_{yz}=pr_{yOz}d\sigma$ bo'lgani uchun $d\sigma_{yz}=\begin{cases}+dydz, & \theta<\pi/2,\\ -dydz, & \theta>\pi/2,\\ 0, & \theta=\pi/2,\end{cases}$

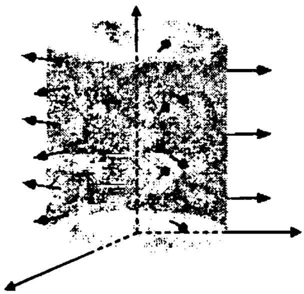
3) σ_{yz} proyeksiya bo'yicha ikki karrali integralni hisoblash.

Bu yerda θ normal $\vec{n}$ bilan Ox o'qi orasidagi burchak.

$I_2=\iint\limits_{\sigma}a_y(x,y,z)d\sigma_{xz}$ integralni hisoblash uchun esa:

1) integral ostidagi funksiyada y ni sirt tenglamasi $y=y(x,z)$ bilan almashtiramiz.

2) $d\sigma_{xz}=pr_{xOz}d\sigma$ bo'lgani uchun $d\sigma_{xz}=\begin{cases}+dxdz, & \lambda<\pi/2,\\ -dxdz, & \lambda>\pi/2,\\ 0, & \lambda=\pi/2,\end{cases}$



3.7 - rasm

3) σ_{xz} proeksiya bo‘yicha ikki karrali integralni hisoblash.

Bu yerda λ normal $\vec{n}$ bilan Oy o‘qi orasidagi burchak.

I_3 integral ham shu tarzda hisoblanadi.

3- misol. $\vec{a}=\{y^5, y, z^4-x^4\}$ vektor maydonning $x^2+y^2=9$ $(0\le z\le 5)$ silindrning yon sirtining tashqi tomonidan o‘tuvchi oqimini toping (3.7 – rasm).

▷ Oqimni hisoblash uchun (3.5) formuladan foydalanamiz.

$$Q=\pm\iint_S a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy = \pm\iint_S y^5 dydz + ydzdx + \left(z^4 - x^4\right)dxdy.$$

1) avval $I_1=\pm\iint_S y^5 dydz$ integralni hisoblaymiz. Silindrning tenglamasi $x=+\sqrt{9-y^2}$ bo‘lgan S_1 qismida tashqi normal bilan x o‘qi orasidagi burchak o‘tkir burchak bo‘lgani uchu integral ishorasini «+» ishorasi bilan olamiz. Silindr tenglamasi $x=-\sqrt{9-y^2}$ ko‘rinishda bo‘lgan S_2 qismi uchun tashqi normal bilan x o‘qi orasidagi burchak o‘tmas burchak bo‘ladi, shuning uchun integralning bu qismida «-» ishorasi bilan olamiz.

$$I_1=\iint_{S_1} y^5 dydz + \iint_{S_2} y^5 dydz = \iint_{D_{yz}} y^5 dydz - \iint_{D_{yz}} y^5 dydz = 0.$$

2) $I_2=\pm\iint_S ydydz$ integralni hisoblaymiz. Silindrning tenglamasi $y=+\sqrt{9-x^2}$ bo‘lgan S_3 qismida tashqi normal bilan y o‘qi orasidagi burchak o‘tkir burchak bo‘lgani uchun integral ishorasini «+» ishorasi bilan olamiz. Silindr tenglamasi $y=-\sqrt{9-x^2}$ ko‘rinishda bo‘lgan S_4 qismi uchun tashqi normal bilan y o‘qi orasidagi burchak o‘tmas burchak bo‘ladi, shuning uchun integralni bu qismida « – » ishorasi bilan olamiz.

$$I_2=\iint_{S_3}\sqrt{9-x^2}\,dxdz + \iint_{S_4}\sqrt{9-x^2}\,dxdz =$$

$$=\iint_{D_{xz}}\sqrt{9-x^2}\,dxdz + \iint_{D_{xz}}\left(-\sqrt{9-x^2}\right)(-dxdz) = 2\iint_{D_{xz}}\sqrt{9-x^2}\,dxdz$$

Oxirgi integralni takroriy integralga keltirib yechsak $I_2 = 45\pi$ kelib chiqadi.

3) $I_3 = \pm\iint\limits_S (z^4 - x^4)dxdy$ integralni hisoblaymiz. Oz o'qi bilan silindrning tashqi normali bilan $\pi/2$ burchak tashkil qilgani uchun $I_3 = 0$ bo'ladi. Shunday qilib $Q = I_1 + I_2 + I_3 = 45\pi$ bo'ladi. ◀

3.4. Vektor maydon divergensiyasi

Maydon divergensiyasi vektor maydonning muhim xarakteristikalaridan biridir. Faraz qilaylik, biror G sohada $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_x\vec{j} + a_z\vec{k}$ vektor maydon berilgan bo'lib, barcha o'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz birinchi tartibli xusussiy hosilalarga ega bo'lsin.

Ta'rif. $\vec{a}(M)$ *vektor maydonning divergensiyasi deb*

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

munosobat bilan aniqlangan skalyar miqdorga aytiladi.

Vektor maydoni divergensiyasining asosiy xossalari:

- $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}$
- agar $\vec{c} = const$, ya'ni o'zgarmas vektor bo'lsa, u holda $\operatorname{div}\vec{c} = 0$ bo'ladi.
- $\operatorname{div}(u, \vec{a}) = u \cdot \operatorname{div}\vec{a} + (\vec{a}, \operatorname{grad}u)$, bu erda $u = u(x, y, z)$- skalyar funksiya.

Birinchi va ikkinchi xossalarni tekshirish qiyin emas. Uchinchi xossaning isbotini keltiramiz.

$$\operatorname{div}(u \cdot \vec{a}) = \frac{\partial(u \cdot a_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u \cdot a_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u \cdot a_z)}{\partial z} =$$

$$= \frac{a_x \partial u}{\partial x} + \frac{a_y \partial u}{\partial y} + \frac{a_z \partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) = (\vec{a}, \operatorname{grad}u) + u \cdot \operatorname{div}\vec{a}.$$

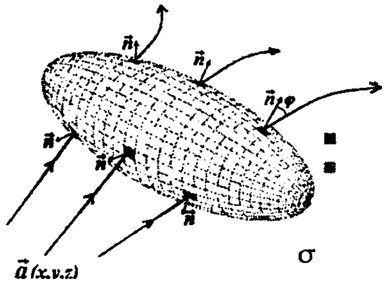
$\operatorname{div}\vec{a}$ yordamida $\vec{a}$ vektor maydon skalyar maydonga aylanadi.

Misol. $\vec{a} = \vec{r} = \{x, y, z\}$ maydonning divergensiyasini toping.

▷ $$\operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$ ◀

3.5. Yopiq sirt bo‘yicha oqimning fizik ma’nosi

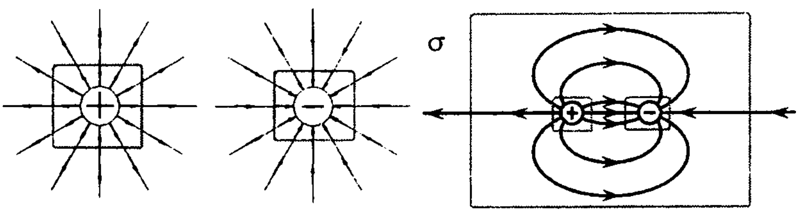
Sirt yopiq bo‘lganda tashqi tomonga yo‘nalgan normal musbat deb qabul qilingan. Fazoning biror G hajmini σ yopiq sirt o‘ragan bo‘lsin (3.8 – rasm). Bu yopiq sirtdan o‘tuvchi siqilmaydigan suyuqlikning $\vec{a}=\vec{a}(M)$ tezliklar maydonini qaraylik. Sirt yopiq bo‘lganda sirtga kirayotgan vektor chiziqlari bilan chiqayotgan vektor chiziqlarining soni teng bo‘ladi.



3.8 - rasm

Yopiq sirtdagi $Q=\oiint\limits_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma$ oqim birlik vaqt ichida σ sirtdan o‘tadigan suyuqlik miqdoriga teng ($\vec{n}$ - tashqi normal birlik vektori). Bu yerda $\oiint\limits_{\sigma}$ belgi sirtning yopiq ekanligini anglatadi. Yopiq sirtga suyuqlikning kirayotgan nuqtalarida $\vec{a}$ vektor bilan (suyuqlik tezligi) $\vec{n}$ normal orasidagi burchak o‘tmas bo‘ladi. Suyuqlikning sirtdan chiqayotgan qismida esa $\vec{a}$ va $\vec{n}$ vektorlar orasidagi burchak o‘tkir bo‘ladi. $\vec{a}$ vektor maydonning yopiq σ sirtdagi oqimi birlik vaqt σ sirt ichida kirayotgan va undan chiqayotgan suyuqlik miqdorlarining ayirmasini beradi.

Agar oqim qiymati $Q > 0$ bo‘lsa, yopiq sirtdan chiqayotgan suyuqlik miqdori kirayotganga qaraganda ko‘p bo‘ladi. Bu holat G sohada **manba** borligidan dalolat beradi (3.9 - rasm).



Manba *Qurdum* *Umumiy oqim*

3.9 – rasm.

Agar oqim qiymati $Q < 0$ bo‘lsa, yopiq sirtdan chiqayotgan suyuqlik miqdori kirayotganga qaraganda kam bo‘ladi. Bunda G sohada **qurdum** borligini ifodalaydi.

Agar $Q = 0$ bo'lsa, yopiq sirtdan chiqayotgan suyuqlik miqdori kirayotganga qaraganda teng bo'ladi. Bunda G sohada manba va qurdumlar yo'qligini yoki ularning umumiy quvvati tengligini ko'rsatadi.

3.6. Ostrogradskiy - Gauss formulasi

Agar σ - yopiq bo'lakli silliq sirt bo'lib, tashqi normalning birlik vektori $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ bo'lsa, u holda bu sirt orqali oqib o'tadigan $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ vektor oqimi Q ni ushbu **Ostrogradskiy - Gauss formulasi** yordamida hisoblash mumkin:

$$Q=\oiint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})\cdot d\sigma=\iiint_{G}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dxdydz. \qquad (3.5)$$

Bu formulada G - fazoning σ yopiq sirt bilan chegaralangan bo'lagi; σ tashqi normal bo'yicha orientirlangan sirt; $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ vektor koordinatalari va ularning xususiy hosilalari bilan uzluksiz funksiyalar.

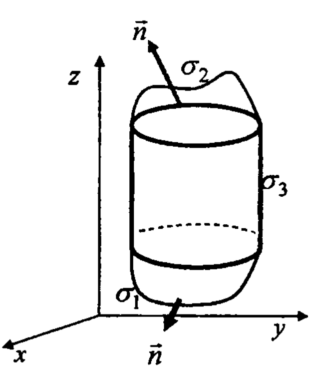
Isboti. 1. G sohamiz elementar H_z ko'rinishda bo'lsin (3.10 – rasm). Ya'ni G soha pastdan va yuqoridan mos ravishda $\sigma_1: z_1=z_1(x,y)$ va $\sigma_2: z_2=z_2(x,y)$ sirtlar bilan, yon tomondan esa yasovchilari Oz o'qiga parallel bo'lgan σ_3 sirt bilan o'ralgan bo'lsin.

Quyidagi integralni qaraylik:

$$\iiint_{G}\frac{\partial a_z}{\partial z}dxdydz=\iint_{\sigma_{xy}}dxdy\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial a_z}{\partial z}dz=\iint_{\sigma_{xy}}dxdy\,a_z\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}=$$

$$=\iint_{\sigma_{xy}}dxdy\{a_z(x,y,z_2(x,y))-a_z(x,y,z_1(x,y))\}=$$

$$=\iint_{\sigma_{xy}}a_z(x,y,z_2(x,y))dxdy-\iint_{\sigma_{xy}}a_z(x,y,z_1(x,y))dxdy.$$



3.10 - rasm

σ_2 sirtda $\cos\gamma>0$, σ_1 sirtda $\cos\gamma<0$ bo'lgani uchun σ_2 da $dxdy=\cos\gamma d\sigma$ σ_1 da esa $dxdy=-\cos\gamma d\sigma$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\iint_{\sigma_{xy}}a_z(x,y,z_2(x,y))dxdy-\iint_{\sigma_{xy}}a_z(x,y,z_1(x,y))dxdy=$$

$$=\iint_{\sigma_2}a_z(x,y,z)cos\gamma d\sigma+\iint_{\sigma_1}a_z(x,y,z)cos\gamma d\sigma,$$

bo'ladi. Hosil bo'lgan yig'indiga $\iint\limits_{\sigma_3} a_z(x,y,z)\cos\gamma d\sigma$ integralni qo'shamiz. σ_3 sirtda $\cos\gamma = 0$ bo'lgani uchun $\iint\limits_{\sigma_3} a_z(x,y,z)\cos\gamma d\sigma = 0$.

Shunday qilib,

$$\iiint\limits_G \frac{\partial a_z}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\sigma_2} a_z(x,y,z)\cos\gamma d\sigma + \iint\limits_{\sigma_1} a_z(x,y,z)\cos\gamma d\sigma + \iint\limits_{\sigma_3} a_z(x,y,z)\cos\gamma d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3} a_z(x,y,z)\cos\gamma d\sigma = \oiint\limits_{\sigma} a_z(x,y,z)\cos\gamma d\sigma,$$

kelib chiqadi.

2. Endi umumiy holni ko'raylik. Fazoviy G sohani n ta elementar H_z turdagi sohalarga ajratish mumkin bo'lsin: $G = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$.

$\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}$ simvollar orqali G_k sohani o'rovchi $\sigma^{(k)}$ sirtning quyi, yuqori va yon sirtlarini belgilaylik. U holda

$$\iiint\limits_G \frac{\partial a_z}{\partial z} dxdydz = \sum_{k=1}^{n} \iiint\limits_{G_k} \frac{\partial a_z}{\partial z} dxdydz =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \iint\limits_{\sigma_1^k} a_z \cos\gamma d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2^k} a_z \cos\gamma d\sigma + \iint\limits_{\sigma_3^k} a_z \cos\gamma d\sigma \right\} = \oiint\limits_{\sigma} a_z \cos\gamma d\sigma$$

bo'ladi. Chunki $\sigma_3^{(k)}$ bo'yicha olingan integrallar nolga teng, $\sigma_1^{(k)}$ va $\sigma_2^{(k)}$ sirtlar bo'yicha integrallar yig'indisi $\sigma^{(k)}$ sirt bo'yicha olingan integralni beradi.

Xuddi shuningdek, H_x va H_y ko'rinishdagi sohalar uchun

$$\iiint\limits_G \frac{\partial a_y}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_{\sigma} a_y \cos\beta d\sigma; \quad \iiint\limits_G \frac{\partial a_x}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_{\sigma} a_x \cos\alpha d\sigma;$$

formulalarga kelamiz.

Topilganlarni qo'shsak formulanng isboti kelib chiqadi.

Ostragradskiy - Gauss formulasini quyidagicha ham yozish mumkin:

$$Q = \oiint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}) \cdot d\sigma = \iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a} dxdydz$$

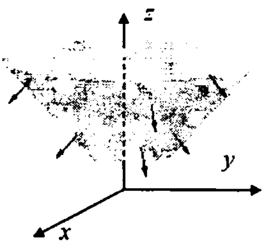
1- *misol.* $\vec{a} = (3z^2 + x)\vec{i} + (e^x - 2y)\vec{j} + (2z - xy)\vec{k}$ vektor maydonning yopiq $\sigma: x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$, $z = 4$ sirtdan o'tuvchi oqimini toping (3.11 – rasm).

▷ Sirt yopiq bo'lganligi uchun Ostrogradskiy–Gauss formulasidan foydalanamiz. Avval berilgan maydon divergensiyasini hisoblaymiz: $\operatorname{div}\vec{a} = 1 - 2 + 2 = 1$.

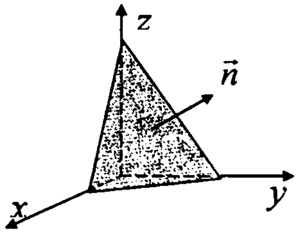
Demak,

$$Q=\iiint\limits_G div\vec{a}dV=\iiint\limits_G dV=V$$

Bu yerda V kesik konus xajmi.



3.11 - rasm



3.12 - rasm

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(R_1^2\cdot h_1-R_2^2\cdot h_2\right)=\frac{1}{3}\pi\left(4^2\cdot 4-1^2\cdot 1\right)=21\pi \blacktriangleleft$$

2- misol. $\vec{a}=\{2x,z,y\}$ vektor maydonning koordinata tekisliklari va $3x+2y+z=6$ tekislik bilan chegaralangan piramidaning to‘la sirtidan o‘tuvchi oqimni toping (3.12 – rasm).

▷ Sirt yopiq bo‘lgani uchun Ostragradskiy - Gauss formulasidan foydalanamiz.

$$Q=\iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{a}dV=\iiint\limits_V(2+0+0)dV=2V_{pir}=$$

$$2\left(\frac{1}{3}S_{asos}\cdot h\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\right)\cdot 6=12 \blacktriangleleft$$

3-misol. $\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ vektorning $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z=0$, $(z>0)$ yopiq sirt bo‘yicha vektor maydon oqimini toping.

▷ (3.5) formulaga asosan

$$Q=\iiint\limits_V(2x+2y+2z)dV$$

Bu integralni r, θ, φ sferik koordinatalar sistemasida hisoblash qulaylik tug‘diradi, ya’ni

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

elementar hajm esa

$$dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi,$$

Shuning uchun

$$Q=2\iiint_V (r\sin\theta\cos\varphi+r\sin\theta\sin\varphi+r\cos\theta)r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi=$$

$$=2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(\sin\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta)d\theta\int_0^R r^3 dr = \quad ◄$$

$$\frac{2R^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\, d\theta=\frac{\pi R^4}{2}.$$

4-*misol.* $\vec{a}$ vektor maydonning yopiq S sirt bo'yicha olingan oqimini toping.

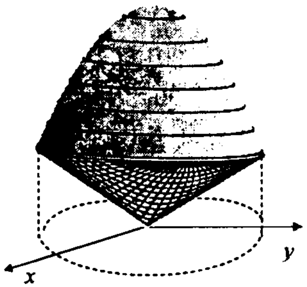
$$\vec{a}=(x+4\acute{o})\vec{i}+(3z-y)\vec{j}+2z\vec{k},\quad S:\begin{cases} z=2-3(x^2+y^2),\\ z^2=x^2+y^2, (z\geq 0).\end{cases}$$

▷ Ostrogradskiy – Gauss formulasidan foydalansak,

$$Q=\iint_S a_n ds=\iiint_V\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dv=$$

$$\iiint_V\left(\frac{\partial(x+4y)}{\partial x}+\frac{\partial(3z-y)}{\partial y}+\frac{\partial(2z)}{\partial z}\right)dv=\iiint_V(1-1+2)dv=2V_\mu.$$

Bu yerda V_μ jism hajmi. S sirt bilan o'ralgan jism hajmini topamiz.



3.13 - rasm

3.13 - rasmdan ko'rinib turibdiki, S sirt $z^2=x^2+y^2$ konus (z ≥ 0) va paraboloid sirtlarining qismlaridan iborat. Shuning uchun

$$V_\mu=\iint_D\left(2-3\left(x^2+y^2\right)-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

bo'ladi. Bu integralni hisoblash uchun D doiraning radiusini topish kerak. Bu radius quyidagi sistemadan topiladi.

$$\begin{cases} z=2-3(x^2+y^2),\\ z=\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

Bu sistemadan $R=2/3$ kelib chiqadi. V_μ ni qutb koordinatalar sistamasiga o'tib yechamiz $(0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq r\leq 2/3)$.

$$V_\mu=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{2/3}\left(2-3r^2-r\right)rdr=\frac{32}{81}\pi.$$

Demak, $Q=2V_\mu=\dfrac{64}{81}\pi$. ◀

5-*misol.* $\vec a=xz^2\vec i+yx^2\vec j+zy^2\vec k$ vektor maydonning $x^2+y^2+z^2=a^2$ shar sirti bo‘yicha uning tashqi tomoniga oqimini hisoblang.

▷ Sirt yopiq bo‘lgani uchun $\vec a$ vektor maydonning shar sirti bo‘yicha tashqi tomoniga oqimi Q ni Ostrogradskiy–Gauss formulasi bo‘yicha topamiz:

$$Q=\iint_\sigma(\vec a,\vec n)d\sigma=\iiint_G \mathrm{div}\vec a\cdot dxdydz=\iiint_G (z^2+x^2+y^2)dxdydz.$$

Uch o‘lchovli integralni hisoblash uchun quyidagi formulalar yordamida sferik koordinatalarga o‘tamiz:

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cdot\cos\varphi, \\ y=r\sin\theta\cdot\sin\varphi, \\ z=r\cos\varphi, \end{cases}\quad \text{bu erda}\quad 0\le r\le a,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\pi,$$

va quyidagini topamiz $dxdydz=r^2\sin\theta\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta$, u holda

$$Q=\iint_\sigma(\vec a,\vec n^0)d\sigma=\iiint_\Omega \mathrm{div}\vec a\cdot dxdydz=\iiint_\Omega (z^2+x^2+y^2)dxdydz=$$

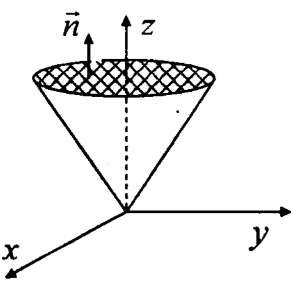
$$=\iiint_\Omega r^4\sin\theta\cdot drd\theta d\varphi=\int_0^a r^4dr\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4a^5\pi}{5}.$$ ◀

6–*misol.* Tezligi $\vec v=\{x+y,z-x,z\}$ ko‘rinishda bo‘lgan suyuqlikning $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le 4)$ konusning yon sirtidan tashqi normal yo‘nalishidagi oqimini toping (3.14 – rasm).

▷ Konusning yon sirtidan o‘tadigan oqimni uning to‘la sirtdan o‘tadigan oqimdan konus asosidan o‘tadigan oqimlar ayirmasi sifatida qarash qulaydir. To‘la sirtdan o‘tadigan oqimni Ostragradskiy - Gauss formulasidan topamiz

$$Q_{to'la}=\iiint_V \mathrm{div}\vec v dV=\iiint_V\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x}+\frac{\partial(z-x)}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\right)dV=$$

$$=2\iiint_V dV=2V_{kon}=2\cdot\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{2\pi}{3}\cdot 4^2\cdot 4=\frac{128\pi}{3}.$$



3.14 - rasm

Suyuqlikning konusning asosidan o‘tadigan oqimni $Q_{asos}=\iint_{S_{asos}}\vec v\cdot\vec n ds$ formuladan topamiz. Konusning asosidagi birlik vektor $\vec n=\{0,0,1\}$ ga teng. Shuning uchun $(\vec v,\vec n)=(x+y)\cdot 0+(z-x)\cdot 0+z\cdot 1=z$ bo‘ladi. Konusning asosida $z=4$

bo‘lgani uchun $(\vec{v},\vec{n})=4$ bo‘ladi.

Demak,

$$Q_{asos}=\iint_{S_{asos}}\vec{v}\cdot\vec{n}ds=4\iint_{S_{asos}}ds=4S_{asos\ yuzi}$$

Bu yerda $S_{asos\ yuzi}$ radiusi 4 ga teng bo‘lgan doira yuzidan iboratdir.

Shunday qilib,

$$Q_{asos}=4\pi R^2=64\pi,$$

$$Q_{yon}=Q_{to'la}-Q_{asos}=\frac{128\pi}{3}-64\pi=-\frac{64}{3}\pi.$$

$Q_{yon}<0$ ekanligi konus yon sirtidan tashqariga chiqadigan suyuqlik miqdori shu sirt bo‘yicha kirayotgan suyuqlik miqdoridan kamligini ko‘rsatadi.

Demak, oqim $-\frac{64}{3}\pi$ ga tengdir. ◀

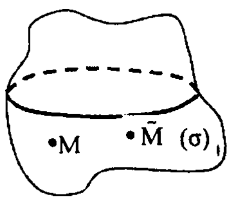
3.7. Divergensiyaning invariant ta’rifi

Fazoda M nuqtani olib uni yopiq sirt σ bilan o‘raylik (3.15 – rasm). Ostragradskiy – Gauss formulasi yordamida $\vec{a}$ vektorning yopiq sirt bo‘yicha oqimini hisoblaylik

$$Q=\oiint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma=\iiint_{G}\text{div}\vec{a}dv$$

Uch karrali integralga o‘rta qiymat haqidagi teoremani qo‘llasak,

$$Q=(\text{div}\vec{a})_{\tilde{M}}\cdot V\Rightarrow(\text{div}\vec{a})_{\tilde{M}}=\frac{Q}{V}.$$



3.15 - rasm

Bu yerda $\tilde{M}$ V sohadagi biror nuqta. Oxirgi tenglikda V sohani M nuqtaga yaqinlashtirib (siqib) limitga o‘tamiz ($\tilde{M}$ nuqta M nuqtaga yaqinlashadi):

$$(\text{div}\vec{a})_M=\lim_{V\to M}\frac{Q}{V}\tag{3.6}$$

Shunday qilib, divergensiyaning invariant ta’rifiga keldik.

3.7.1 Divergensiyaning fizik ma’nosi

$\vec{a}$ vektor maydon suyuqlikning tezliklar maydoni bo‘lsin. Oqim Q V hajmdan chiqayotgan suyuqlik miqdori bilan V ga kirayotgan suyuqlik miqdorlarining ayirmasiga teng. Agar $Q > 0$ bo'lsa, V sohadan chiqayotgan suyuqlik miqdori kirayotganga qaraganda ko'p bo'ladi. Bunda V ichida suyuqlik manbasi mavjud bo'ladi. Q/V miqdor birlik vaqt ichida birlik hajmdan chiqadigan suyuqlik miqdoriga teng bo'ladi. Bunga V hajmdagi manbaning *o'rtacha quvvati* deyiladi. Quyidagi

$$\lim_{V\to M}\frac{Q}{V}=\operatorname{div}\vec{a}(M)$$

miqdorga manbaning M nuqtadagi quvvati deyiladi.

Agar $Q < 0$ V sohaga kirayotgan suyuqlik miqdori chiqayotganga qaraganda ko'p bo'ladi, bunday holatda V ichida qurdumlar mavjud, ularning quvvati $|Q/V|$ ga teng bo'ladi.

$$\left|\lim_{V\to M}\frac{Q}{V}\right|=\left|\operatorname{div}\vec{a}(M)\right|$$

miqdor M nuqtadagi qurdumning quvvatini beradi.

Shunday qilib:

- $\operatorname{div}\vec{a}(M)>0$ bo'lsa, M nuqtada manba bo'lib uning quvvati $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ ga teng bo'ladi,
- $\operatorname{div}\vec{a}(M)<0$ bo'lsa, M nuqtada qurdum bo'lib uning quvvati $\left|\operatorname{div}\vec{a}(M)\right|$ ga teng bo'ladi,
- $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$ bo'lsa, M nuqtada manba va qurdum mavjud bo'lmaydi.

1-*misol.* $\operatorname{div}(f(r)\vec{r})=3f(r)+rf'(r)$ ekanligini isbotlang.

▷ Divergensiya xossasiga ko'ra $\operatorname{div}(f(r)\vec{r})=f(r)\operatorname{div}\vec{r}+(\vec{r},\operatorname{grad}f(r))$

Gradient xossasiga ko'ra $\operatorname{grad}f(r)=f'(r)\operatorname{grad}r=f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$ kelib chiqadi.

U holda

$$\operatorname{div}(f(r)\vec{r})=3f(r)+\left(\vec{r},f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\right)=3f(r)+rf'(r).◀$$

2 – *misol.* q zaryadning kuchlanganlik maydonining divergensiyasi nolligini ko'rsating.

▷ Kuchlanganlik maydoni $\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}$ ga teng bo'ladi. Oldingi misoldan $f(r)=\frac{q}{r^3}$ bo'lganda

$$\operatorname{div}\left(\frac{q}{r^3}\vec{r}\right)=3\frac{q}{r^3}+r\left(\frac{q}{r^3}\right)'_r=3\frac{q}{r^3}+r\left(\frac{-3q}{r^4}\right)=0.◀$$

Tayanch iboralar:

Orientrlangan sirt, oqim, divergensiya, manba, qurdum, Ostragradskiy – Gauss formulasi.

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday sirt orientrlangan deyiladi?
2. Vektor maydon oqimi nima?
3. Vektor maydon oqimi qanday kattalik?
4. Oqimning qanday yozish shakllarini bilasiz?
5. Oqimningh qanday xossalari bor?
6. Oqim qanday hisoblanadi?
7. Oqimni uch tekislikka proeksiyalab hisoblash qanday amalga oshiriladi?
8. Vektor maydon divergensiyasi deb nimaga aytiladi?
9. Vektor maydon divergensiyasi qanday xossalarga ega?
10. Yopiq sirt bo‘yicha oqimning fizik ma’nosi nima?
11. Ostragradskiy – Gauss formulasi qanday formula?
12. Divergensiyaning invariant ta’rifi qanday ta’tif?
13. Divergensiyaning fizik ma’nosi nima?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\vec{a}=\{x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2\}$ vektor maydonning xOy tekislikning $x^2+y^2=R^2$ aylana bilan chegaralangan Oz oqi bo‘yicha orintirlangan qismidan o‘tuvchi oqimini toping.

2. Koordinatalar boshida joylashgan nuqtaviy zaryad fazoda $\vec{E}=\frac{k\vec{r}}{r^3}$ maydon hosil qiladi (k – biror koeffitsiyent). Shu maydonning R radiusli $z=h$ tekislikdagi markazi $(0,0,h)$ nuqtada joylashgan doiraning Oz o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan oqimini toping.

3. $\vec{a}=\{1,-1,xyz\}$ maydonning doiradan o‘tuvchi oqimni toping. Doira shar - $x^2+y^2+z^2\le R^2$ va $y=x$ tekislikning kesishishidan hosil bo‘lgan. Doira normali $\vec{i}$ ort bilan o‘tkir burchak hosil qilgan.

4. $\vec{a}=\{y+z, x+z, x+y\}$ maydonning doiradan o‘tuvchi oqimni toping. Doira shar - $x^2+y^2+z^2\le 1$ va $x+y+z=1$ tekislikning kesishishidan hosil bo‘lgan. Doira normali $\vec{k}$ ort bilan o‘tkir burchak hosil qilgan.

5. div$[\vec{r},\vec{a}]$ ni hisoblang. Bu yerda $\vec{r}$ radius vektor, $\vec{a}$ o‘zgarmas vektor.

6. $\operatorname{div}[\vec{r},[\vec{r},\vec{a}]]$ ni hisoblang. Bu yerda $\vec{r}$ radius vektor, $\vec{a}$ o'zgarmas vektor.

7. $\operatorname{div}\vec{E}$ ni hisoblang. Bu yerda $\vec{E}=\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ nuqtaviy q zaryad hosil qilgan maydon.

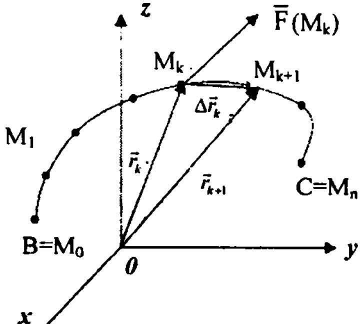
8. $\vec{a}=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ maydonning yopiq S sirtdan o'tuvchi oqimini toping. $S: x^2+y^2+(z-2)^2=1$

4. Vektor maydonidagi chiziqli integral

- ***Kuch maydoning bajargan ishi.***
- ***Chiziqli integral tushunchasi va uning xossalari.***
- ***Chiziqli integralni hisoblash.***
- ***Vektor maydon uyurmasi.***
- ***Grin va Stoks formulalari.***
- ***Rotorning invariant ta'rifi.***
- ***Rotorning fizik manosi.***
- ***Chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaslik sharti.***

4.1. Kuch maydonning bajargan ishi

Berilgan $\vec{F}(M)$ kuch maydonida material nuqta BC chiziq bo'ylab B nuqtadan C nuqtaga harakat qilsin. Kuchning bajargan ishini hisoblaylik. Buning uchun BC chiziqni radius vektorlari $\vec{r}_0,\vec{r}_1,...,\vec{r}_n$ bo'lgan $B=M_0, M_1, M_2,...,M_{n-1}, M_n=C$ nuqtalar yordamida bo'laklarga ajratamiz (4.1 – rasm). Ko'chish vektori



4.1 - rasm

$$\overline{M_kM_{k+1}}=\vec{r}_{k+1}-\vec{r}_k=\Delta\vec{r}_k$$

va kuch vektori $\vec{F}(M_k)=\vec{F}_k$ ni qaraylik. Bu kuchlarning skalyar ko'paytmasi taqriban $\vec{F}(M)$ kuchning M_kM_{k+1} yoy bo'yicha olingan A_k ishiga teng:

$$A_k\approx\left(\vec{F}_k,\Delta\vec{r}_k\right).$$

BC chiziq bo'yicha bajargan ish

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} \left(\vec{F}_k, \Delta\vec{r}_k\right)$$

ga teng bo'ladi. $\Delta\vec{r}_k$ vektorlarning uzunliklari kichik bo'lib borgan sari aniqlik oshib boradi. Bu uzunliklarning eng kattasini d bilan belgilaylik. Taqribiy tenglikda $d \to 0$ limitga o'tib ishning aniq qiymatini topamiz

$$A = \lim_{d \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\vec{F}_k, \Delta\vec{r}_k\right).$$

Bu limitni $\int\limits_{\cup BC} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$ belgi orqali belgilashadi va uni $\vec{F}$ maydonning *BC* yoy bo'yicha chizli integrali yoki 2 – tur chiziqli integral deyiladi.

4.2. Chizli integral tushunchasi va uning xossalari

Ixtiyoriy $\vec{a}(M)$ vektor maydon uchun (maydonning fizik mohiyatidan qat'iy nazar) chiziqli integral tushunchasi yuqorida bayon qilingan tarzda kiritiladi:

$$\int\limits_{\cup BC} \left(\vec{a}(M), d\vec{r}\right) = \lim_{d \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\vec{a}_k, \Delta\vec{r}_k\right),$$

$M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n$ nuqtalar *BC* yoyning bo'linish nuqtalari, $\Delta\vec{r}_k = \overline{M_k M_{k+1}} = \vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k$, $d = \max\left\{\left|\Delta\vec{r}_1\right|, \dots, \left|\Delta\vec{r}_{n-1}\right|\right\}$.

Chiziqli integralning uchta xossasini keltiramiz (bevosita ta'rifdan kelib chiqadigan xossalar):

1) chiziqlilik xossasi: $\int\limits_{\cup BC} \left((\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}), d\vec{r}\right) = \lambda \int\limits_{\cup BC} (\vec{a}, d\vec{r}) + \mu \int\limits_{\cup BC} (\vec{b}, d\vec{r})$.

2) additivlik xossasi: $\int\limits_{\cup BC} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \int\limits_{\cup BD} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int\limits_{\cup DC} (\vec{a}, d\vec{r})$.

3) $\int\limits_{\cup BC} (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int\limits_{\cup CB} (\vec{a}, d\vec{r})$.

Oxirgi xossa integrallash yo'nalishi o'zgarganda chiziqli integral ishorasining o'zgarishini ko'rsatadi, chunki $\Delta\vec{r}_k$ vektorlar yo'nalishini teskarisiga o'zgartiradi.

$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini koordinataar orqali ifodalasak,

$$\int_{\cup BC}(\vec{a},d\vec{r})=\int_{\cup BC}a_x dx+a_y dy+a_z dz, \qquad (4.1)$$

formulaga kelamiz. $a_x dx+a_y dy+a_z dz$ ifodani odatda qavs ichiga olinmaydi; integral belgisi barcha yig'indi uchun tegishli bo'lsa ham. (4.1) formulada $\vec{a}, a_x, a_y, a_z$ lar M nuqtaning, ya'ni uning koordinatalari x,y,z ning fuksiyasidir. $\int_{\cup BC}(\vec{a},d\vec{r})$ integralga chiziqli integralning **vektor shakli** $\int_{\cup BC}a_x dx+a_y dy+a_z dz$ integralga esa uning **koordinatalar shakli** deyiladi.

Agar chiziqli integral biror yopiq L chiziq bo'yicha olinsa chiziqli integralga $\vec{a}$ vektor maydonning L kontur bo'yicha olingan **sirkulyatsiyasi** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$C=\oint_L(\vec{a},d\vec{r}). \qquad (4.2)$$

Sirkulyasiyani hisoblashda L yopiq kontur bo'yicha musbat yo'nalish kontur bilan o'ralgan soha chap tomonda qolishi bilan aniqlanadi.

4.3. Chiziqli integralni hisoblash

L chiziq $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ parametrik ko'rinishda berilganda chiziqli integralni hisoblash qoidasi:

➢ chiziqli integralni koordinatalar ko'rinishida yozish

$\int_L a_x(x,y,z)dx+a_y(x,y,z)dy+a_z(x,y,z)dz,$

➢ $a_x(x,y,z),\ a_y(x,y,z),\ a_z(x,y,z)$ funksiyalarda x, y, z larni $x(t),\ y(t),\ z(t)$ lar bilan almashtirish

➢ dx, dy, dz larni mos ravishda $x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt,$ lar bilan almashtirish,

➢ parametr t ning o'zgarish oralig'ini topish va hosil bo'lgan aniq integralni hisoblash.

L chiziq tekislikda berilgan bo'lib, uning tenglamasi

$y=y(x),\ x\in[a,b]$ bo'lsa:

➢ chiziqli integralni koordinata shaklida yozish

$\int_L a_x(x,y)dx+a_y(x,y)dy,$

➢ $a_x(x,y),\ a_y(x,y)$ funksiyalarda y ni $y(x)$ bilan almashtirish,

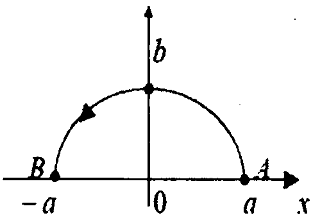
➢ dy ni $y'(x)dx$ bilan almashtirish,

➢ hosil bo‘lgan aniq integralni $[a,b]$ oraliqda hisoblash.

Agar vektor maydon $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ ko‘rinishda bo‘lsa, $\vec{r}^2 = r^2$ tenglikdan uni differensiallasak $2\vec{r}d\vec{r} = 2rdr$ kelib chiqadi. Demak, bunday maydonlar uchun chiziqli integral

$$\int_{\cup BC} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{\cup BC} f(r)(\vec{r}, d\vec{r}) = \int_{r_B}^{r_C} f(r) r dr$$

aniq integralga keltiriladi.



4.2- rasm

1- *misol.* $\vec{F} = (x+y)\vec{i} - (x-y)\vec{j}$ kuchning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips yuqori bo‘lagi bo‘ylab *A(a,0)* nuqtadan *B(-a,0)* nuqtaga siljigandagi bajargan ishini hisoblang (4.2 – rasm).

▷ $\vec{F} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ kuchning bajargan ishi

$$\int_{AB} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

chiziqli integral orqali ifodalanadi. Bizda $a_x = x + y, a_y = -(x - y)$, $a_z = 0$. Ellipsning parametrik tenglamasidan foydalanamiz: $x=a\cos t$, $y=b\cos t$, $z=0$. t parametrning A va B nuqtaga mos kelgan qiymatlarini topamiz. A nuqtada $x=a=a\cos t_1$, $\cos t_1=1$, $t_1=0$; B nuqtada $x=-a=a\cos t_2=-1$, $t_2=\pi$.

U holda,

$$\int_{AB} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \int_{AB} a_x dx + a_y dy = \int_0^{\pi} [(a\cos t + b\cos t)(-a\sin t) -$$

$$-(a\cos t - b\sin t)b\cos t]dt = \int_0^{\pi} (-a^2\cos t\sin t - ab\sin^2 t - ab\cos^2 t +$$

$$+b^2\sin t\cos t)dt = \int_0^{\pi}\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\sin 2t - ab\right)dt = -\pi ab. ◀$$

2-*misol.* $\vec{F} = \{x^2, -yz, z\}$ kuchning $B(1,2,-1)$ nuqtadan $C(3,3,2)$ nuqtaga siljishdagi ishini toping.

▷ $\vec{F}$ kuchning bajargan ishi

$$A = \int_{BC} \vec{F}d\vec{r} = \int_{BC} x^2dx - yzdy + zdz$$

formuladan topiladi. Bu integralni hisoblash uchun BC to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{3-2}=\frac{z+1}{2+1}=t.$$

Bu yerdan $x=2t+1,\ y=t+2,\ z=3t-1;\ dx=2dt,\ dy=dt,\ dz=3dt.$

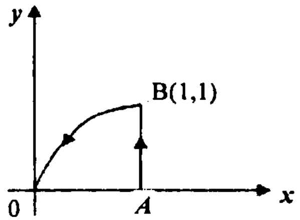
B nuqtaga mos kelgan parametr t ning qiymatini topamiz: $t_B=0$. Xuddi shuningdek, $t_C=1$. Integralda x, y, z, dx, dy, dz larning ifodalarini qo‘yamiz

$$A=\int\limits_{BC} x^2dx-yzdy+zdz=\int\limits_0^1\left[(2t+1)^2\cdot 2-(t+2)(3t-1)+(3t-1)\cdot 3\right]dt=26/3. \blacktriangleleft$$

3- *misol.* $\vec{a}=y\vec{i}+2x\vec{j}$ maydonning $OABO$ chiziq bo‘yicha sirkulyatsiyasini toping. OB $y^2=x$ parabola yoyi, OAB siniq chiziq (4.3 – rasm).

$\triangleright$ Sirkulyatsiyani

$$C=\oint\limits_{OABO}(\vec{a},d\vec{r})=\int\limits_{OA}(\vec{a},d\vec{r})+\int\limits_{AB}(\vec{a},d\vec{r})+\int\limits_{BO}(\vec{a},d\vec{r})$$



4.3 - rasm

formuladan aniqlaymiz. OA kesmada $y=0,\ dy=0$. Shuning uchun,

$$I_1=\int\limits_{OA}(\vec{a},d\vec{r})=\int\limits_{OA}ydx+2xdy=0.$$

AB kesmada $x=1,\ dx=0,\ 0\le y\le 1.$ Shuning uchun

$$I_2=\int\limits_{AB}ydx+2xdy=\int\limits_0^1 2dy=2.$$

BO yoyda $x=y^2,\ dx=2ydy,\ y_B=1,\ y_O=0$. Shuning uchun

$$I_3=\int\limits_{BO}ydx+2xdy=\int\limits_1^0\left(y\cdot 2y+2y^2\right)dy=\int\limits_1^0 4y^2dy=-\frac{4}{3}.$$

Shunday qilib, $C=I_1+I_2+I_3=0+2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}.\blacktriangleleft$

4- *misol.* $\vec{a}=\left\{-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right\}$ maydonning markazi koordinata boshida joylashgan radiusi R ga teng bo‘lgan soat meli yo‘nalishiga qarshi yo‘nalish bo‘yicha sirkulyatsiyasini toping (4.4 – rasm).

$\triangleright$ Sirkulyatsiyani

$$C=\oint\limits_L\vec{a}d\vec{r}=\oint\limits_L-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

formuladan aniqlaymiz.

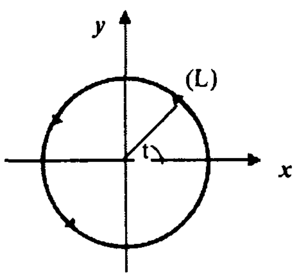
Bu integralni hisoblash uchun aylananing parametrik tenglamasini yozamiz: $x = R\cos t,\ y = R\sin t$. Bundan $dx = -R\sin t dt,\ dy = R\cos t dt$; $0 \le t \le 2\pi$. Shuning uchun

$$C = \int_0^{2\pi} \frac{-R\sin t \cdot (-R\sin t) + R\cos t \cdot R\cos t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. ◀$$

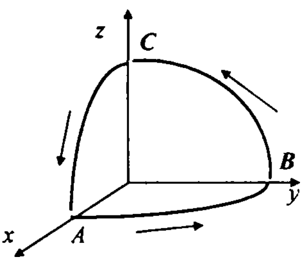
5–*misol.* $\vec{F} = (y^2 - z^2)\cdot\vec{i} + (z^2 - x^2)\cdot\vec{j} + (x^2 - y^2)\cdot\vec{k}$ kuchning $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sferaning koordinata tekisliklari bilan $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$ kesishishidan hosil bo'lgan chiziq bo'yicha bajargan ishini toping (konturni aylanib o'tish musbat yo'nalishda) (4.5 – rasm).

▷ Maydonning bajargan ishini

$$A = \int_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$



4.4 - rasm



4.5 - rasm

formuladan aniqlaymiz. L kontur markazi koordinata boshida radiusi birga teng bo'lgan $x = 0, y = 0, z = 0$ koordinata tekisliklarida joylashgan aylana yoylaridan iborat. Demak,

$$\int_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) + \int_{BC} (\vec{F}, d\vec{r}) + \int_{CA} (\vec{F}, d\vec{r})$$

bo'ladsi.

AB yoy tenglamasi $z = 0,\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, \pi/2]$, bo'lgani uchun

$$dx = -\sin t\, dt,\ dy = \cos t\, dt,\ dz = 0;$$

$$(\vec{F}, d\vec{r}) = y^2dx - x^2dy = (-\sin^3 t - \cos^3 t)dt;\ \int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_0^{\pi/2} (\sin^3 t + \cos^3 t)dt.$$

Xuddi shuningdek, BC yoy uchun: $x = 0,\ y = \cos t,\ z = \sin t,\ t \in [0, \pi/2]$,

$$dx = 0,\ dy = -\sin t\, dt,\ dz = \cos t\, dt;$$

$$\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=z^2dy-y^2dz=\left(-\sin^3t-\cos^3t\right)dt;\ \int\limits_{BC}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=-\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^3t+\cos^3t\right)dt.$$

CA yoy uchun:

$$y=0,\ x=\cos t,\ z=\sin t,\ t\in[0,\pi/2],\ dy=0,\ dx=-\sin t dt,\ dz=\cos t\,dt$$

$$\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=z^2dx+x^2dz=\left(\sin^3t+\cos^3t\right)dt;\ \int\limits_{CA}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=-\int\limits_{\pi/2}^{0}\left(\sin^3t+\cos^3t\right)dt.$$

Shunday qilib,

$$\int\limits_L\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=-3\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^3t+\cos^3t\right)dt=3\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos^2t)d(\cos t)-3\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2t)d(\sin t)=$$

$$-3\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2t)d(\sin t)=\left(3\cos t-\cos^3t-3\sin t+\sin^3t\right)\Big|_0^{\pi/2}=-4.\blacktriangleleft$$

4.4. Vektor maydon uyurmasi

$\vec{a}=\vec{a}(P)=\{a_x,a_y,a_z\}$ vektor funksiya o‘zlarining birinchi tartibli xususiy hosilalari bilan birga G sohada uzluksiz bo‘lsin.

Quyidagi vektor yordamida

$$\text{rot}\vec{a}=\vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

aniqlanadigan vektorga $\vec{a}$ vektor maydonning uyurmasi deyiladi.

Bu ifodani simvolik

$$\text{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

ko‘rinishda yozish qulaylik tug‘diradi. Bu determinantni birinchi satr bo‘yicha ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazis vektorlar bo‘yicha) yoyish va xususiy hosilalarni vektor komponentalariga ko‘paytmasini differensiallash deb qarash kerak, ya’ni $\frac{\partial}{\partial z}a_x=\frac{\partial a_x}{\partial z}$, va h.k.

Agar maydonning biror nuqtasida $rot\vec{a}=0$ bo‘lsa maydon bu nuqtada uyurmasiz deyiladi.

1 – *misol.* $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x^2+z)\vec{k}$ vektor maydonning uyurmasini toping.

$$\triangleright\ \text{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2+z)-\frac{\partial}{\partial z}(y+z)\right)-$$

$$\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+z)-\frac{\partial}{\partial z}(x+z)\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(y+z)-\frac{\partial}{\partial y}(x+z)\right)=$$

$$=-\vec{i}-\vec{j}(2x-1)+0\cdot\vec{k}=\{-1,1-2x,0\}.\blacktriangleleft$$

Uyurma vektorining xossalari.

1. $\text{rot}(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=\lambda\cdot\text{rot}\vec{a}+\mu\cdot\text{rot}\vec{b}$, λ,μ o'zgarmas sonlar.
2. $\text{rot}(u\cdot\vec{a})=[\text{grad}u,\vec{a}]+u\cdot\text{rot}\vec{a}$, bu yerda $u=u(x,y,z)$ skalyar maydon.

Birinchi xossa uyurma ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Ikkinchi xossaning isbotini keltiramiz.

$$\text{rot}(u\vec{a})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ ua_x & ua_y & ua_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(ua_z)-\frac{\partial}{\partial z}(ua_y)\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(ua_z)-\frac{\partial}{\partial z}(ua_x)\right)+$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(ua_y)-\frac{\partial}{\partial y}(ua_x)\right)=u\left\{\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}a_z-\frac{\partial}{\partial z}a_y\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}a_z-\frac{\partial}{\partial z}a_x\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}a_y-\frac{\partial}{\partial y}a_x\right)\right\}+$$

$$\vec{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}a_z-\frac{\partial u}{\partial z}a_y\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial u}{\partial x}a_z-\frac{\partial u}{\partial z}a_x\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}a_y-\frac{\partial u}{\partial y}a_x\right)=u\cdot\text{rot}\vec{a}+[\text{grad}u,\vec{a}].$$

2 – *misol.* $\text{rot}(r\vec{a})$ hisoblang ($\vec{a}$ o'zgarmas vektor, r radius vektor uzunligi).

$$\triangleright\ \text{rot}(r\vec{a})=[\text{grad}r,\vec{a}]+r\cdot\text{rot}\vec{a}=[\text{grad}r,\vec{a}]=\left[\frac{\vec{r}}{r},\vec{a}\right]=\frac{1}{r}[\vec{r},\vec{a}].\blacktriangleleft$$

4.5. Grin va Stoks formulalari

L kontur bilan chegaralangan orientirlangan S sirtni qaraylik. S sirtni o'z ichiga olgan fazoda $\vec{a}=\vec{a}(P)=\{a_x,a_y,a_z\}$ uzliksiz differensiallanuvchi vektor maydon berilgan bo'lsin. S sirt koordinata tekisliklarining birortasiga bir qiymatli proeksiyalash imkoniyati bo'lsin, masalan, Oxy tekisligiga unda sirt tenglamasi $z=z(x,y)$ bo‘lsin. U holda quyidagi formula o‘rinli:

$$\oint_L a_x(x,y,z)dx+a_y(x,y,z)dy+a_z(x,y,z)dz=$$
$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds \tag{4.3}$$

Bu yerda $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ lar – sirt normal vektorining yo‘naltiruvchi kosinuslari, L- esa sirt chegarasi. Bu formula **Stoks formulasi** deyiladi. Stoks formulasida S sirt L konturga tortilgan va S sirtga o‘tkazilgan normal uchidan qaralganda L konturni aylanib chiqish soat mili yo‘nalishiga qarshi bo‘lishi kerak (4.6 – rasm). Keltirilgan formulani isbotlashda Grin formulasidan foydalanamiz. Grin formulasini esga olaylik. D_{xy} yopiq tekis sohada $\vec{a}=\{a_x(x,y),a_y(x,y)\}$ uzliksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. U holda

$$\oint_L a_x(x,y)dx+a_y(x,y)dy=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dxdy \tag{4.4}$$

Grin formulasi o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda L D_{xy} soha chegarasi; konturni aylanib chiqish musbat yo‘nalishda amalga oshiriladi.

<u>**Izoh.**</u> Stoks formulasi Grin formulasini umumlashtirganligini ko‘rish qiyin emas. Haqiqatan ham, (4.3) formulada S sirt tekis sohadan iborat bo‘lsa, birinchi va ikkinchi qavslar aynan nolga teng bo‘ladi. $a_z\equiv 0$ bo‘lgani uchun $\frac{\partial a_z}{\partial y}=0$, va a_y z ga bog‘liq bo‘lmagani uchun $\frac{\partial a_y}{\partial z}=0$. a_x z ga bog‘liq emas, $\frac{\partial a_x}{\partial z}=0$ va $\frac{\partial a_z}{\partial x}=0$. Uchinchi yig‘indida $\cos\gamma=1$ bo‘ladi.

Endi Stoks formulasining isbotiga kelaylik.

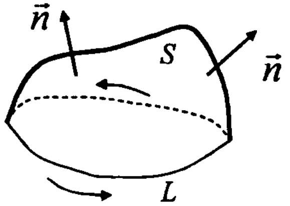
L kontur bilan chegaralangan S sirt D_{xy} sohaga ℓ kontur bo‘yicha proeksiyalanadi (4.7 – rasm).

$I_1=\oint_L a_x(M)dx$ egri chiziqli integralni ko‘raylik.

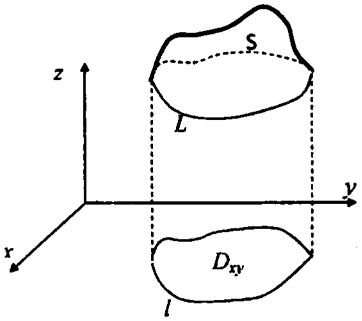
L chiziq S sirtda yotganligi uchun $z=z(x,y)$ munosabat L chiziqda ham o‘rinli. Unda

$$I_1=\oint_L a_x(M)dx=\oint_L a_x(x,y,z(x,y))dx$$

o‘rinli bo‘ladi.



4.6 - rasm



4.7 - rasm

I_1 integralda (4.4) Grin formulasidan foydalanamiz (bizning holda $a_y(x,y)=0$) $a_x(x,y,z(x,y))=\tilde{a}_x(x,y)$ belgilash kiritaylik. $M(x,y,z(x,y))$ nuqta L kontur bo‘yicha harakatlanganda uning proeksiyasi $N(x,y)$ nuqta D_{xy} sohaning l chegarasi bo‘ylab harakatlanadi. Demak,

$$I_1=-\iint_{D_{xy}}\frac{\partial\tilde{a}_x}{\partial y}dxdy$$

Murakkab funksiyadan hosila olish qoidasidan foydalanib $\tilde{a}_x(x,y)$ funksiyadan y bo‘yica hususiy hosila olamiz: $\frac{\partial\tilde{a}_x}{\partial y}=\frac{\partial a_x}{\partial y}+\frac{\partial a_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$

Unda,

$$\iint_{D_{xy}}\frac{\partial\tilde{a}_x}{\partial y}dxdy=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}+\frac{\partial a_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy \tag{4.5}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. $\frac{\partial z}{\partial y}$ hususiy hosilani S sirtga o‘tkazilgan ort orqali ifodalash mumkin:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}. \tag{4.6}$$

Haqiqatan ham, S sirt tenglamasi $F(x,y,z)=0$ oshkormas funksiya orqali berilgan bo‘lsa, uning normali ortining koordinatalari $\vec{n}^0(M)=\left\{\frac{F'_x}{|\vec{n}|},\frac{F'_y}{|\vec{n}|},\frac{F'_z}{|\vec{n}|}\right\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ bo‘ladi. U holda $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari, $dxdy=\cos\gamma ds$

bo'ladi. (4.6) ifodani (4.5) ga qo'yamiz. Natijada (4.5) ikki karrali integralni 1- tur sirt integrali aylantirish mumkin:

$$\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}+\frac{\partial a_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}-\frac{\partial a_x}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma ds=-\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial a_x}{\partial y}\cos\gamma\right)ds.$$

Shunday qilib, quyidagi formulaga keldik:

$$I_1=\oint\limits_L a_x(M)dx=\iint\limits_S\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial a_x}{\partial y}\cos\gamma\right)ds. \qquad (4.7)$$

Agar S sirt Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotsa S sirtda $dx=0, \cos\beta=\cos\gamma=0$ bo'ladi va (4.7) formula avtomatik ravishda bajariladi.

Xuddi shu yo'l bilan

$$I_2=\oint\limits_L a_y(M)dy=\iint\limits_S\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial a_y}{\partial z}\cos\alpha\right)ds. \qquad (4.8)$$

(Bu yerda Grin formulasini Oxz tekisligiga proeksiyalanganidan foydalanildi).

$$I_3=\oint\limits_L a_z(M)dz=\iint\limits_S\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial a_z}{\partial x}\cos\beta\right)ds. \qquad (4.9)$$

formulalarga kelamiz.

(4.7), (4.8) va (4.9) formulalarni qo'shib, chiziqli va sirt integrallarning chiziqlilik xossasidan foydalanib (4.3) formulaga kelamiz:

$$\oint\limits_L a_x(x,y,z)dx+a_y(x,y,z)dy+a_z(x,y,z)dz=$$

$$=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds$$

Teorema isbot bo'ldi.

Stoks formulasini vektor ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\oint\limits_L(\vec{a},d\vec{r})=\iint\limits_S(\mathrm{rot}\vec{a},\vec{n})ds$$

Orientirlangan S sirt bo'yicha vektor maydon uyurmasining oqimi vektor maydonning S sirtga tortilgan L kontur bo'yicha sirkulyatsiyasiga teng (L kontur orientatsiyasi S sirt orintatsiyasiga qarab olinadi).

1-*misol.* $\vec{a}=(20x^4+1)z\cdot\vec{i}-5y\cdot\vec{j}+4x^5\cdot\vec{k}$ maydonning $y=4$ tekisligida joylashgan $x^2+z^2=9$ aylana bo'yicha sirkulyatsiyasini toping (yo'nalish Oy o'qi oxiridan qaraganda soat meli yo'nalishiga qarshi orientirlangan) (4.8 – rasm).

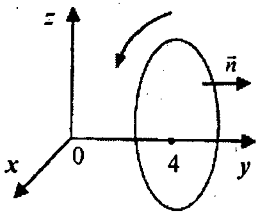
▷ Sirkulyatsiyani bevosita yechish ancha murakkab. Stoks formulasidan foydalanib yechamiz. Buning uchun maydon rotorini hisoblaymiz

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (20x^4+1)z & -5y & 4x^5\end{vmatrix}=\vec{i}(0-0)-\vec{j}\left(20x^4-20x^4-1\right)+\vec{k}(0-0)=\vec{j}.$$

Stoks formulasiga ko'ra $C=\oint\limits_L(a,d\vec{r})=\iint\limits_S(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})ds.$

Aylanaga tortilgan S sirt sifatida shu aylana bilan chegaralangan doirani olamiz. Bu sirtga o'tkazilgan normal vektor Oy o'qi bo'ylab yo'nalgan, ya'ni $\vec{n}=\vec{j}$. U holda $(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})=\vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}|^2=1$; va $C=\iint\limits_S(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})ds=\iint\limits_S ds=S=\pi R^2=9\pi.$

◀

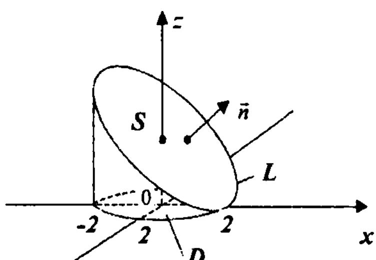


4.8 - rasm

2-*misol.* $\vec{a}$ maydonning L kontur bo'yicha olingan sirkulyatsiyasining modulini hisoblang (4.9 – rasm).

$$\vec{a}=-4y\cdot\vec{i}+10z\cdot\vec{j}-2x^2\cdot\vec{k},\quad L:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ 2x+z=4.\end{cases}$$

▷ Sirkulyatsiya moduli orientatsiyaga bog'liq emas. Shuning uchun orientatsiyani ixtiyoriy olish mumkin. L kontur $x^2+y^2=4$ silindr va $z=4-2x$ tekislikning kesishishidan hosil bo'lgan ellipsdan iborat. Sirkulyatsiyani bevosita va Stoks formulasidan foydalanib hisoblaymiz.



4.9 - rasm

1-*usul.* L konturning parametrik tenglamasini tuzamiz. Konturning xOy tekisligidagi proeksiyasi $x^2+y^2=4$ aylanadan iborat bo'lgani uchun $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ bo'ladi. Tekislik tenglamasidan $z=4-4\cos t$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$L:\begin{cases} x=2\cos t,\\ y=2\sin t\\ z=4-4\cos t\\ 0\le t\le 2\pi.\end{cases}.$$

Sirkulyatsiya formulasidan

$$\tilde{N}=\oint_L(\vec{a},d\vec{r})=\int_0^{2\pi}[-4\cdot 2\sin t(2\cos t)'+10(4-4\cos t)(2\sin t)'-$$

$$-2(2\cos t)^2(4-4\cos t)']dt=\int_0^{2\pi}(16\sin^2 t+80(\cos t-\cos^2 t)-$$

$$-32\cos^2 t\sin t)dt=8\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt+80\int_0^{2\pi}\cos t dt-$$

$$-40\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt+32\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt\cos t=$$

$$=(8t-4\sin 2t+80\sin t-40t-20\sin t+\frac{32}{3}\cos^3 t)\Big|_0^{2\pi}=-64\pi.$$

2-*usul*. Sirkulyatsiyani Stoks formulasi yordamida topamiz

$$\oint_L(\vec{a},d\vec{r})=\iint_S(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})dS,$$

bu yerda S L ellipsning ichki tomoni. S sirtdan o'tadigan $\vec{b}=\operatorname{rot}\vec{a}$ vektor oqimini topamiz.

$$\vec{b}=\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -4y & 10z & -2x^2\end{vmatrix}=-10\vec{i}+4x\vec{j}+4\vec{k}=\{-10;4x;4\};$$

$$\vec{n}=\{-z'_x;-z'_y;1\}=\{-2;0;1\}.$$

U holda,

$$\iint_S(\vec{b},\vec{n})dS=\iint_D(b_z-b_x z'_x-b_y z'_y)dxdy;$$

$$\iint_S(\vec{b},\vec{n})dS=\iint_D(4-(-10)(-2)-4x\cdot 0)dxdy=-16\iint_D dxdy=-64\pi \blacktriangleleft$$

4.6. Rotorning invariant ta'rifi

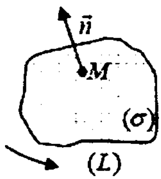
Maydonning rotorini

$$\text{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

ko'rinishda aniqlash dekart koordinatalar sistemasidagina o'rinlidir. Stoks formulasi rotorning invariant (koordinatalar sistemasiga bog'liq bo'lmagan) ta'rifini berishga imkon beradi.

$\vec{a} = \vec{a}(M)$ Stoks formulasini qanoatlantiruvchi vektor maydon bo'lsin; $\vec{n}$ vektor M nuqtadan o'tuvchi birlik vektor bo'lsin. Stoks formulasiga ko'ra (4.10- rasm):

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \oiint_\sigma (\text{rot}\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \oiint_\sigma pr_{\vec{n}}\text{rot}\vec{a}\, d\sigma.$$



4-10 rasm.

O'rta qiymat haqidagi teoremaga ko'ra shunday M_1 nuqta mavjudki unda $\text{pr}_{\vec{n}}\text{rot}\vec{a}(M_1)\cdot\sigma = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r})$ bo'ladi. U holda $\text{pr}_{\vec{n}}\text{rot}\vec{a}(M_1) = \dfrac{\oint_L (\vec{a}, d\vec{r})}{\sigma}$. L konturni M nuqtaga qisib boramiz, unda $M_1 \to M$ va $\text{pr}_{\vec{n}}\text{rot}\vec{a}(M) = \lim\limits_{L\to M} \dfrac{\oint_L (\vec{a} d\vec{r})}{\sigma}$ bo'ladi. $\dfrac{\oint_L (\vec{a}, d\vec{r})}{\sigma}$ munosabatga $\vec{a}$ maydon sirkulyatsiyasining $\vec{n}$ yo'nalishdagi zichligi deyiladi. Sirkulyatsiya zichligining eng katta qiymati $|\text{rot}\vec{a}|$ ga teng boladi va bunga $\vec{a}$ va $\vec{n}$ vektorlarning yo'nalishlari mos kelganda bo'ladi. Shuning uchun $\text{rot}\vec{a}$ vektorning $\vec{n}$ yo'nalishdagi proeksiyasi koordinatalar sistemasini tanlanishiga bog'liq emas. Natijada rotorning invariant tarifiga kelamiz.

$\vec{a}$ vektor maydonning M nuqtadagi rortori quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

- $\text{rot}\vec{a}$ ning yo'nalishi shundayki, unda $\vec{a}$ vektor maydonning M nuqtadagi zichligi eng katta bo'ladi;
- $\text{rot}\vec{a}$ ning miqdori $\vec{a}$ vektor maydon sirkulyatsiya zichligining eng katta qiymatiga teng.

va u L konturni siqishdan olingan sirkulyatsiya zichligiga teng (L konturni o'ragan yuza $\vec{n}$ yo'nalishga perpendikulyar).

4.7. Rotorning fizik manosi

Qattiq jism o'zgarmas ω burchak tezlik bilan aylanayotgan bo'lsin. Qattiq jism nuqtalarining tezliklar maydonini va shu maydonning rotorini topaylik.

Koordinatalar sistemasini shunday tanlaylikki unda Oz o'qi jismning aylanish o'qi bilan mos kelsin (4.11.- rasm). Kinematikadan ma'lumki, M nuqtaning tezligi $\vec{v}=[\vec{\omega},\vec{r}]$ ga teng. Bu yerda $\vec{r}$ nuqtaning radius vektori: $\vec{r}=\{x,y,z\}$, $\vec{\omega}$ - burchak tezligi vektori $\vec{\omega}=\omega\vec{k}=\{0,0,\omega\}$. Tezliklar maydonini topamiz:

$$\vec{v}=[\vec{\omega},\vec{r}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}=-\omega y\vec{i}+\omega x\vec{j}$$

Maydonning M nuqtadagi rotorini hisoblaylik:

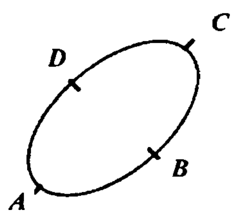
$$\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+(\omega+\omega)\vec{k}=2\omega\vec{k}=2\vec{\omega}.$$

Shunday qilib, qattiq jism tezligining rotori ikkilangan burchak tezligiga teng ekan.

Ixtiyoriy vektor maydonning biror nuqtadagi rotori maydonning shu nuqtadagi aylanma xarakat qilish imkoniyatini harakterlaydi.

4.8. Chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaslik sharti

Amaliyotda chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liqmi yoki u faqat chiziqning boshlang'ich va oxirgi nuqtasigagina bog'liqligini aniqlash muhimdir (fizik nuqtaunazardan kuchning bajargan ishi yo'l shakliga bog'liqligi). Chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligining uch shartini keltiramiz. $\vec{a}(M)=\{a_x(M),a_y(M),a_z(M)\}$ may-



4.11 -rasm

don differensiallanuvchi bo'lsin.

Teorema 4.1 (sirkulyatsiyaning nolga tengligi haqida). Chiziqli integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligi uchun ixtiyoriy yopiq kontur bo'yicha olingan sirkulyatsiya nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. $\vec{a}$ vektor maydon sirkulyatsiyasini ixtiyoriy yopiq $ABCDA$ chiziq bo'yicha hisoblaylik (4.11- rasm).

$$C=\oint_{\cup ABCDA}(\vec{a}d\vec{r})=\oint_{\cup ABC}(\vec{a}d\vec{r})+\oint_{\cup CDA}(\vec{a}d\vec{r})=\oint_{\cup ABC}(\vec{a}d\vec{r})-\oint_{\cup ADC}(\vec{a}d\vec{r}).$$

Bu tenglikdan sirkulyatsiyaning nol bo'lishi uchun $\oint_{\cup ABC}(\vec{a},d\vec{r})=\oint_{\cup ADC}(\vec{a},d\vec{r})$ bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. Ya'ni $\int(\vec{a},d\vec{r})$ integralning boshlang'ich va oxirgi qiymatlari mos kelgan ixtiyoriy chiziqlar bo'yicha olingandagi qiymati teng bo'ladi. Shuning uchun integral qiymati integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi.

Bu mezon bo'yicha chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq emasligini tekshirish ancha mushkul. Integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydigan effektiv mezonni berishdan oldin yangi tushuncha kiritamiz.

Agar sohada yotuvchi ixtiyoriy yopiq konturni sohada yotuvchi sirt bilan tortish imkoniyati bo'lsa, bunday sohalarga ***bir bog'lamli*** soha deyiladi. Bir bog'lamli sohalarga doira, shar, kublar misol bo'la oladi. Bir bog'lamli bo'lmagan sohalar: halqa, tor (teshik kulcha) lar kiradi.

Teorema 4.2 (rotorning nolga tenligi haqida). Bir bog'lamli sohada chiziqli integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligi uchun sohaning har bir nuqtasida rotorning nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Zarurligi. Chiziqli integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasin. Unda ixtiyoriy yopiq kontur bo'yicha olingan sirkuyatsiya nolga teng bo'ladi. U holda

$$\mathrm{pr}_{\vec{n}}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)=\lim_{L\to M}\frac{\oint_L(\vec{a}\,d\vec{r})}{\sigma}=0,$$

ya'ni, rotorning ixtiyoriy $\vec{n}$ vektordagi ixtiyoriy nuqtadagi proeksiyasi nolga teng. Shuning uchun maydonning ixtiyoriy nuqtasida $\mathrm{rot}\,\vec{a}=0$ bo'ladi.

Yetarligi. Bir bog'lamli D sohada $\mathrm{rot}\,\vec{a}=0$ bo'lsin. D da yotuvchi ixtiyoriy yopiq L konturni qaraymiz. Soha bir bog'lamli bo'lgani uchun L ga tortilgan D da yotuvchi σ sirtni topish mumkin. $\vec{a}$ maydonning L

kontur bo'yicha sirkulyatsiyasi Stoks formulasi va $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ bo'lishligidan

$$C = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_\sigma (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n}) d\sigma = 0$$

kelib chiqadi. Ixtiyoriy yopiq kontur bo'yicha olingan integral nolga teng bo'lgani uchun oldingi teoremaga ko'ra $\int_L (\vec{a}, d\vec{r})$ inetral integrallash yo'liga bo'g'liq emas. Teorema isbot bo'ldi.

Teorema 4.3 (integral ostidagi ifoda to'g'risida). $\int_L (\vec{a}, d\vec{r})$ chiziqli integralning integrallash yo'liga bo'g'liq bo'lmasligi uchun integral ostidagi $(\vec{a}, d\vec{r})$ ifoda biror U funksiyaning to'liq differensiali bo'lishi zarur va yetarlidir.

Zarurligi. $\int_L (\vec{a}, d\vec{r})$ integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasin. $U(M) = \int_{M_0M} (\vec{a}, d\vec{r})$ funksiya izlanayotgan funksiyligini ko'rsatamiz (M_0 fiksirlangan nuqta), ya'ni $(\vec{a}, d\vec{r}) = dU$. Buning uchu xususiy ortirmani topamiz

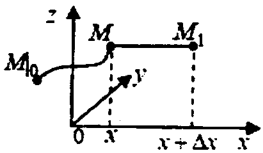
$$\Delta_x U = U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z) = \int_{M_0M_1} (\vec{a}, d\vec{r}) - \int_{M_0M} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

$\int_L (\vec{a}, d\vec{r})$ integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmagani uchun M_0M_1 chiziqni ixtiyoriy tanlaymiz: M_0M chiziq va MM_1 to'g'ri chiziqni olamiz (4-12 – rasm).

Integral xossasiga ko'ra

$$\Delta_x U = \int_{M_0M_1} (\vec{a}, d\vec{r}) - \int_{M_0M} (\vec{a}, d\vec{r}) =$$

$$\left[\int_{M_0M} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{MM_1} (\vec{a}, d\vec{r}) \right] - \int_{M_0M} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{MM_1} (\vec{a}, d\vec{r}).$$



4.12. - rasm

MM_1 kesmada faqat x ozgaruvchi, y va z lar o'zgarmasligini inobatga olsak, $dy = 0$, $dz = 0$ bo'ladi va integralni koordinatalar shaklida quyidagicha yozamiz

$$\Delta_x U = \int_{MM_1} (\vec{a} d\vec{r}) = \int_{MM_1} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_x^{x+\Delta x} a_x dx$$

Oxirgi aniq integralga o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llaymiz:

$$\Delta_x U = \int_x^{x+\Delta x} a_x(x, y, z) dx = a_x(\tilde{x}, y, z) \Delta x,$$

Bu yerda $\tilde{x}\in[x,x+\Delta x]$. U holda

$$U'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x U}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a_x(\tilde{x},y,z)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a_x(\tilde{x},y,z)=a_x(x,y,z).$$

Shunday qilib, $U'_x=a_x(x,y,z)$. Xuddi shuningdek,
$U'_y=a_y(x,y,z)$, $U'_z=a_z(x,y,z)$. ekanligini ko'rsatish qiyin emas. U holda,

$$(\vec{a},d\vec{r})=a_x dx+a_y dy+a_z dz=U'_x dx+U'_y dy+U'_z dz=dU$$

bo'ladi.

Yetarligi. $(\vec{a},d\vec{r})=dU$ o'rinli bo'ladigan U funksiya mavjud bo'lsin. Parametrik tenglamasi

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t);\ t\in[t_A,t_B]$$

ko'rinishda bo'lgan AB yoyni olaylik. Unda,

$$\int_{\cup AB}(\vec{a},d\vec{r})=\int_{\cup AB}dU(x,y,z)=\int_{t_A}^{t_B}dU(x(t),y(t),z(t))=U(x(t),y(t),z(t))\Big|_{t_A}^{t_B}=$$

$$=U(x_B,y_B,z_B)-U(x_A,y_A,z_A)=U(B)-U(A),$$

bo'ladi. Shuning uchun $\int_L(\vec{a},d\vec{r})$ integralning qiymati faqat A va B nuqtalargagina bog'liq bo'lib uning shakliga bog'liq bo'lmaydi.

Isbotlash jarajonida biz chiziqli integral uchun Nyuton-Leybnis formulasini eslatuvchi formulani ham keltirib chiqardik.

$$\int_{\cup AB}dU=U(B)-U(A). \tag{4.10}$$

Yuqorida keltirilgan teoremalardan quyidagi qoidani keltirish mumkin.

Agar D soha bir bog'lamli bo'lsa, quyidagi shartlar bir-biriga teng kuchli:

- $\int_L(\vec{a},d\vec{r})$ chiziqli integral integrallash yoliga bog'liq emas;
- $\int_L(\vec{a},d\vec{r})$ chiziqli integral D da joylashgan ixtiyoriy yopiq kontur bo'yicha integral nolga teng;
- D sohaning barcha nuqtalarida $\operatorname{rot}\vec{a}=0$ bo'ladi;
- $(\vec{a},d\vec{r})$ ifoda biror U funksiyaning to'liq differensiali bo'ladi.

1-*misol.* Ushbu

$$\int_L(2xy+z^2)dx+(x^2+z)dy+(y+2xz)dz$$

chiziqli integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lish-bo'lmasligini tekshiring.

▷ Buning uchun $\vec{a}=\{2xy+z^2, x^2+z, y+2xz\}$ vektorning rotorini hisoblaymiz

$$\mathrm{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+z^2 & x^2+z & y+2xz \end{vmatrix}=(1-1)\vec{i}+(2z-2z)\vec{j}+(2x-2x)\vec{k}=\vec{0};$$

Shuning uchun berilgan chiziqli integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi.

Chiziqli integral integrallash yo'liga bog'liq emas. ◀

2-*misol.* $\vec{a}=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\vec{i}+y[xy+\ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2})]\vec{j}$

vektor maydonning L: $x^2+y^2=R^2$ kontur bo'yicha sirkulyatsiyasini toping.

▷ Sirkulyatsiyani

$$C=\oint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2+y^2}\right)\right]dy$$

Grin formulasida hisoblaymiz.

$$\frac{\partial a_x}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\ \frac{\partial a_y}{\partial x}=y^2+\frac{y\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2+y^2}}=$$

$$=y^2+y\frac{\left(\sqrt{1+x^2+y^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2+y^2}\left(x+\sqrt{1+x^2+y^2}\right)}=y^2+\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

$$C=\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(y^2+\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)dxdy=$$

$$=\iint_D y^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho d\rho(\rho^2\sin^2\varphi)=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\int_0^R\rho^3d\rho=$$

$$=\frac{R^4}{4}\cdot\left\{\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}-\left(\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}\right\}=\frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{2}2\pi=\frac{\pi R^4}{4}.\ ◀$$

Tayanch iboralar:

Kuch maydoni; egri chiziqli integral; yopiq kontur bo'yicha olingan egri chiziqli integral, vektor maydon uyurmasi; Grin va Stoks formulalari.

Takrorlash uchun savollar

1. Kuch maydonining bajargan ishi qanday topiladi?
2. Chiziqli integral qanday xossalarga ega?
3. Chiziqli integralning vektor shakli qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. Chiziqli integralning koordinatalar shakli qanday ko'rinishda bo'ladi?
5. Sirkulyatsiya nima?
6. Vektor maydon uyurmasi qanday hisoblanadi?
7. Uyurmaning qanday xossalar mavjud?
8. Grin formulasi qanday bo'ladi?
9. Stoks formulasi qanday ko'rinishga ega?
10. Rototrning invariant ta'rifi nima?
11. Chiziqli integralni integrallash yo'liga bog'liq emasligini qanday izohlaysiz?
12. Qanday shartlarda chiziqli integral integrallash yo'liga bog'liq emas?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\vec{r}=\{x,y\}$ vektor maydonning $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsning yuqori qismidan $(0,b)$ nuqtadan $(a,0)$ nuqtaga siljishdagi bajargan ishini toping.
2. $\vec{a}=\{x^2,y^2,z^2\}$ maydonning $A(0,0,0)$ nuqtadan $B(1,1,1)$ to'g'ri chiq bo'ylab siljishdagi bajargan ishini toping.
3. $\vec{a}=\{2xz,-y,z\}$ maydonning $x+y+2z=2$ tekislikning koordinata tekisliklari bilan kesishishidan hosil bo'lgan yopiq kontur bo'yicha sirkulyatsiyasini hisoblang. Yopiq konturni aylanib o'tish $x\to y\to z\to x$ bo'yicha.
4. $\vec{a}=\{y^2,z^2,x^2\}$ vektor maydonning $x^2+y^2+z^2=R^2$ va $x^2+y^2=Rz$ $(z>0)$ sirtlarning kesishishidan hosil bo'lgan kontur bo'yicha sirkulyatsiyasini hisoblang.
5. $\vec{E}=\frac{k\vec{r}}{r^3}$ maydonning rotorini toping (k – koeffitsiyent).

6. $\mathrm{rot}(\vec{r},\vec{c})\vec{r} = [\vec{c},\vec{r}]$ tenglikni isbotlang. Bu yerda $\vec{c}$ o‘zgarmas vektor.

7. $\vec{a} = \{y, x^2, -z\}$ vektor maydonning L kontur bo‘yicha sirkulyatsiyasini $\left(L: x^2 + y^2 = R^2,\, z = 0\right)$ (konturni aylanib chiqish o‘ng qo‘l qoidasi bo‘yicha) Stoks formulasida hisoblang.

5. Maxsus vektor maydonlar. Vektor maydonning takroriy amallari. Nabla operatori

- ***Potensial maydon.***
- ***Solenoidal maydon.***
- ***Garmonik maydon.***
- ***Vektor maydonning takroriy amallari.***
- ***Nabla operatori.***

5.1. Potensial maydon

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ vektor maydon berilgan bo‘lib, uning komponentalari uzluksiz va hosilalari mavjud bo‘lsin.

Agar $\vec{a}$ vektor maydon biror skalyar maydon U ning gradient maydoni bo‘lsa, ya’ni $\vec{a} = \mathrm{grad}\,U$ bo‘lsa, U funksiyaga $\vec{a}$ vektor maydonning **potensiali** deyiladi.

$\mathrm{grad}(U + C) = \mathrm{grad}\,U$ bo‘lgani uchun $U + C$ funksiya ham potensial bo‘ladi.

Potensial maydon xossalari:

1) $\vec{a}$ vektor maydon U potensialga ega bo‘lishi uchun $(\vec{a}, d\vec{r}) = dU$,

2) bir bog‘lamli sohada $\vec{a}$ potensial maydon bo‘lishi uchun $\mathrm{rot}\,\vec{a} = 0$,

3) potensial maydonda $\int\limits_L (\vec{a}, d\vec{r})$ chiziqli integral integrallash shakliga bog‘liq emas,

4) potensial maydonda maxsus nuqtalarni o‘z ichiga olmagan ixtiyoriy kontur bo‘yicha sirkulyatsiya nolga teng,

5) potensial maydonda barcha maxsus nuqtalarni o‘z ichiga olgan konturlar bo‘yicha sirkulyatsiyalar o‘zaro teng,

6) Potensial maydonda yoy bo‘yicha olingan chiziqli integral potensiallarning yoy oxiri va yoy boshi nuqtalarining ayirmasiga teng.

Bu xossalarni tekshiramiz.

1) $\vec{a}$ potensial maydon bo‘lgani uchun $\vec{a} = \mathrm{grad}\,U = \{U'_x, U'_y, U'_z\}$.

$$(\vec{a}\,d\vec{r}) = \left(\{U'_x, U'_y, U'_z\}, \{dx, dy, dz\}\right) = U'_x dx + U'_y dy + U'_z dz = dU.$$

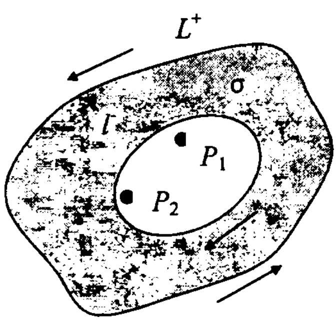
2) bu xossa 1) xossa, teorema 4.3 va 4.2 dan kelib chiqadi.

3) bu xossa 1) xossa, teorema 4.3 dan kelib chiqadi.

4) bu xossa 2) xossa, teorema 4.2 dan kelib chiqadi.

5) L va l barcha $P_1, P_2, ..., P_n$ maxsus nuqtalarni o‘z ichiga oluvchi kontur bo‘lsin. Kontur orinentasiyasi shunday olinadiki σ sohani aylanib chiqishda u chapda qolsin, ya’ni L soat meliga qarshi l soat meli bo‘yicha (5.1 – rasm). Bunday orintasiyali konturlarni L^+, l^- bilan belgilaymiz. Konturi $\gamma = L^+ \cup l^-$ chiziqlar bilan chegralangan σ sohada maydon potensialli. Shuning uchun 3) xossa va 4.2 teoremaga ko‘ra $\mathrm{rot}\,\vec{a} = 0$. Unda Stoks teoremasiga ko‘ra

$$\oint_{\gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{\sigma} (\mathrm{rot}\,\vec{a}, d\vec{\sigma}) = 0$$



5.1- rasm

Ikkinchi tomondan

$$\oint_{\gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint_{L^+} (\vec{a}, d\vec{r}) + \oint_{l^-} (\vec{a}, d\vec{r}) =$$

$$= \oint_{L^+} (\vec{a}, d\vec{r}) - \oint_{l^+} (\vec{a}, d\vec{r}),$$

va shuning uchun $\oint_{L^+} (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint_{l^+} (\vec{a}, d\vec{r})$ bo‘ladi.

6) $\vec{a}$ maydon potensialli bo‘lib U uning potensiali bo‘lsa $(\vec{a}\,d\vec{r}) = dU$ bo‘ladi va (4.10) formuladan

$$\int_{\cup AB} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{\cup AB} dU = U(B) - U(A).$$

3) va 6) xossalar potensial kuch maydonida kuch maydonining bajargan ishi yoy shakliga bog‘liq bo‘lmasligini va bu ish yoyning oxiri va boshdagi potensiallar ayirmasiga teng bo‘lishligini bildiradi.

Endi $\vec{a}$ maydonning potensialini topish usullariga to‘xtalamiz.

Potensialni $(\vec{a}, d\vec{r})$ ifodadan aniqlash.

Potensialning 1) xossasidan foydalanamiz. $(\vec{a},d\vec{r})$ ifodani biror U funksiyaning to'liq differensiali ko'rinishda ifodalash imkoniyati bo'lsa, $\vec{a}$ potensial maydon bo'lib, U funksiya uning potensiali bo'ladi.

1*–misol.* Quyidagi maydonlarning potensial maydonligini va uning potensialini toping.

$$1)\ \vec{a}=2x\vec{i}+3y^2\vec{j}+4z^3\vec{k},\quad 2)\vec{a}=\{yz,xz,xy\},\quad 3)\vec{a}=\frac{\{x,y,z\}}{x^2+y^2+z^2+1}$$

▷ 1) $(\vec{a},d\vec{r})=2xdx+3y^2dy+4z^3dz=d(x^2)+d(y^3)+d(z^4)=d(x^2+y^3+z^4)$.

Shuning uchun $\vec{a}$ potensial maydon va $U=x^2+y^3+z^4$ funksiya uning potensialidir.

2) $(\vec{a},d\vec{r})=yzdx+xzdy+xydz=d(xyz)$. Shuning uchun $\vec{a}$ potensial maydon va $U=xyz$ funksiya uning potensialidir.

3) $$(\vec{a},d\vec{r})=\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2+1}=\frac{1/2d(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}d\left(\ln(x^2+y^2+z^2+1)\right).$$

Shuning uchun $\vec{a}$ potensial maydon va $U=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2+1)$ funksiya uning potensialidir.◀

Potensialni ta'rif bo'yicha topish.

$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ potensial maydon uchun U uning potensiali bo'lsa $\mathrm{grad}\,U=\vec{a}$. Bu koordinatalar ko'rinishda

$$U'_x=a_x,\quad U'_y=a_y,\quad U'_z=a_z, \tag{5.1}$$

(5.1) ni birinchisini x bo'yicha integrallaymiz. Integrallash jarayonida x ga bog'liq bo'lmagan konstanta ishtirok etadi (bu konstanta y va z ga bog'liq bo'ladi).

$$U=\int a_x(x,y,z)dx+c(y,z).$$

$c(y,z)$ funksiyani topish uchun bu ifodani (5.1) tenglikning ikkinchi va uchinchi tengliklarga qo'yamiz.

2- *misol.* $\vec{a}=\left(\frac{z}{y}+x\right)\vec{i}-\frac{xz}{y^2}\vec{j}+\left(\frac{x}{y}+1\right)\vec{k}$ maydonning potensialligini tekshiring va potensialini toping.

▷ Maydon potensialligini tekshirish uchun maydonning rotorini topamiz.

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{z}{y}+x & \dfrac{-xz}{y^2} & \dfrac{x}{y}+1 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-\frac{x}{y^2}+\frac{x}{y^2}\right)-\vec{j}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y}\right)+\vec{k}\left(-\frac{z}{y^2}+\frac{z}{y^2}\right)=0.$$

$\mathrm{rot}\,\vec{a}=0$ bo‘lgani uchun maydon potensial maydon. Demak, $\mathrm{grad}\,U=\vec{a}$ yoki uning koordinatalar formasi

$$U'_x=\frac{z}{y}+x,\quad U'_y=-\frac{xz}{y^2},\quad U'_z=\frac{x}{y}+1. \tag{5.2}$$

Bu tenglikning birinchisini x bo‘yicha integrallaymiz

$$U=\int\left(\frac{z}{y}+x\right)dx=\frac{z}{y}x+\frac{x^2}{2}+c(y,z)$$

U ning topilgan qiymatini (5.2) ning ikkinchi va uchinchi tengliklariga qo‘yamiz.

$$U'_y=\frac{-xz}{y^2}+c'_y(y,z)=\frac{-xz}{y^2},\qquad U'_z=\frac{x}{y}+c'_z(y,z)=\frac{x}{y}+1.$$

Bu tengliklardan $c'_y=0,\ c'_z=1$ kelib chiqadi. Bulardan $c(y,z)=z+c_1$ ga tengdir. Bu yerda c_1 o‘zgarmas. Shuning uchun

$$U=\frac{z}{y}x+\frac{x^2}{2}+z+c_1.\blacktriangleleft$$

5.2. Solenoidal maydon

Agar $\vec{a}$ vektor maydon uchun $\mathrm{div}\,\vec{a}=0$ bo‘lsa $\vec{a}$ vektor maydonga **solenoidal** maydon deyiladi.

Solenoidal maydon xossalari.

1) solenoidal maydonda maxsus nuqtalarni o‘z ichiga olmagan yopiq sirt bo‘yicha oqim nolga teng;

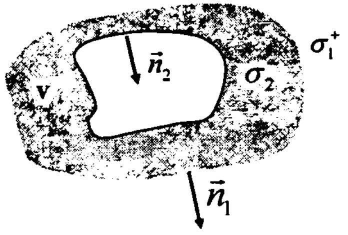
2) solenoidal maydonda barcha maxsus nuqtalarni o‘z ichiga olgan barcha yopiq sirtlardan olingan oqim o‘zaro teng bo‘ladi;

3) solenoidal maydonda vektor naychasining ixtiyoriy kesimidan olingan oqim o‘zgarmasdir (naycha intensivligi).

Bu xossalarni tekshiramiz.

1) solenoidal maydonda $\mathrm{div}\vec{a}=0$ bo'lgani uchun Ostragradskiy-Gauss formulasiga ko'ra

$$Q=\oiint_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})d\sigma=\oiiint_{V}\mathrm{div}\vec{a}dV=0$$



5.2 - rasm

bo'ladi.

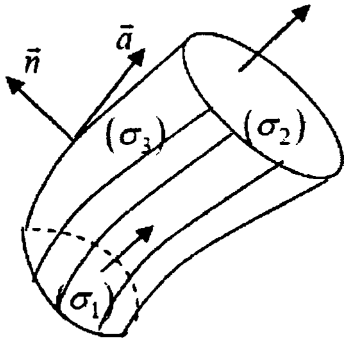
2) σ_1^+, σ_2^- sirtlar maydonning barcha maxsus nuqtalarini o'z ichiga olgan sirtlar bo'lsin (sirt orientasiyasi (5.2.) - rasmda keltirilgan). Chegarasi $\sigma=\sigma_1^+\cup\sigma_2^-$ bo'lgan jism hajmini V deb belgilaylik. V jism ichida $\mathrm{div}\vec{a}=0$ bo'lgan Ostragradskiy-Gauss formulasiga ko'ra

$$Q_\sigma=\oiiint_{V}\mathrm{div}adV=0$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan $Q_\sigma=Q_{\sigma_1^+}+Q_{\sigma_2^-}=Q_{\sigma_1^+}-Q_{\sigma_2^+}$, shuning uchun

$$Q_{\sigma_1^+}=Q_{\sigma_2^+}$$

4). Biror yopiq chiziqdan o'tuvchi vektor chiziqlar majmuasini – vektor naychasini ko'raylik (5.3 – rasm). σ_1^+,σ_2^+ lar vektor naychasining rasmda ko'rsatilgan ko'rinishdagi orientirlangan bo'lsin. σ_3 vektor naychasining sirti. $\sigma=\sigma_1^-\cup\sigma_2^+\cup\sigma_3$ V hajm sirti. σ sirtdan o'tuvchi oqimni hisoblaymiz.



5.3 - rasm

3) xossaga ko'ra bu oqim nolga teng. Ikkinchi tomondan

$$Q_\sigma=Q_{\sigma_1^-}+Q_{\sigma_2^+}+Q_{\sigma_3}=-Q_{\sigma_1^+}+Q_{\sigma_2^+}+Q_{\sigma_3}.$$

σ_3 sirt vektor chiziqlaridan iborat bo'lgani uchun $Q_{\sigma_3}=\iint_{\sigma_3}(\vec{a}\,\vec{n})d\sigma=0$.

Demak, $Q_\sigma=-Q_{\sigma_1^+}+Q_{\sigma_2^+}$ yoki $Q_{\sigma_1^+}=Q_{\sigma_2^+}$.

Misol. q zaryad hosil qilgan $\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}$ maydon kuchlanganligining ixtiyoriy yopiq sirt bo'yicha oqimini toping.

▷ Kuchlanganlik maydoni $\vec{E}$ koordinata boshidan boshqa nuqtalarda solenoidal bo'lgani uchun maydon divergensiyasi nolga teng.

2) xossaga ko'ra koordinata boshini o'z ichiga olmagan yopiq sirt bo'yicha olingan oqim nolga teng bo'ladi.

3) xossaga ko'ra koordinata boshini o'z ichiga olgan yopiq sirt bo'yicha oqim, xususan, markazi koordinatalar boshida joylashgan sferadan olingan oqim $4\pi q$ ga teng. ◀

Vektor potensialni hisoblash.

$\vec{a}$ solenoidal maydonning $\vec{b}$ vektor potensiali ixtiyoriy funksiyaning gradienti aniqligicha topiladi.

Xaqiqadan ham, $\text{qrad}\,U$ maydon potensial bo'lgani uchun, $\text{rot}(\text{grad}\,U)=0$ va shuning uchun

$$\text{rot}(\vec{b}+\text{grad}\,U)=\text{rot}\,\vec{b}+\text{rot}(\text{grad}\,U)=\text{rot}\vec{b}=\vec{a}$$

bo'ladi. Shuning uchun $\vec{b}+\text{grad}\,U$ vektor ham $\vec{a}$ maydonning vektor potensiali bo'ladi. Bu esa $\text{grad}\,U$ ni tanlash hisobiga $\vec{b}$ vektor potensialning biror koordinatasini nolga tenglab olishga imkon yaratadi, masalan, $\vec{b}=\{b_1,b_2,0\}$. U holda

$$\text{rot}\,\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ b_1 & b_2 & 0\end{vmatrix}=\left(-\frac{\partial b_2}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(-\frac{\partial b_1}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

$\text{rot}\,\vec{b}=\vec{a},\ \vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ tengliklardan

$$-\frac{\partial b_2}{\partial z}=a_x,\quad \frac{\partial b_1}{\partial z}=a_y,\quad \frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}=a_z \tag{5.3}$$

Bu tengliklarning birinchi va ikkinchilarini z bo'yicha integrallaymiz:

$$b_2=-\int a_x dz+\varphi(x,y),\quad b_1=\int a_y dz+\psi(x,y).$$

Bu yerda $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ funksiyalar z ga bo'g'liq bo'lmagan ixtiyoriy funksiyalar. Topilgan b_1,b_2 larni (5.3) ning uchinchi tengligiga qo'yib $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ funksiyalarni topamiz.

Misol. $\vec{a}=2y\vec{i}-z\vec{j}+2x\vec{k}$ maydonning solenoidalligini tekshiring va vektor potensialini toping.

▷. $div\,\vec{a}=\dfrac{\partial}{\partial x}(2y)+\dfrac{\partial}{\partial y}(-z)+\dfrac{\partial}{\partial z}(2x)=0$ bo'lgani uchun maydon solenoidal. Shuning uchun $\vec{a}=\text{rot}\,\vec{b}$. Vektor potensialni $\vec{b}=\{b_1,b_2,0\}$ ko'rinishda izlaymiz. Unda

$$\operatorname{rot}\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ b_1 & b_2 & 0\end{vmatrix}=\left(-\frac{\partial b_2}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(-\frac{\partial b_1}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (5.4)$$

$\operatorname{rot}\vec{b}=\vec{a}=2y\vec{i}-z\vec{j}+2x\vec{k}$ dan quyidagi sistemaga kelamiz.

$$\frac{\partial b_2}{\partial z}=-2y,\quad \frac{\partial b_1}{\partial z}=-z,\quad \frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}=2x. \qquad (5.5)$$

(5.5) ning birinchi va ikkinchi tengliklarini z bo‘yicha integrallaymiz.

$$b_2=-\int 2y\,dz=-2yz+\varphi(x,y),$$

$$b_1=\int -z\,dz=-\frac{z^2}{2}+\psi(x,y).$$

Bularni (5.5) ning uchunchi tenglamasiga qo‘yamiz

$$\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}=\varphi'_x(x,y)-\psi'_y(x,y)=2x.$$

Bu tenglikni qanoatlantiruvchi $\psi(x,y)=0,\ \varphi(x,y)=x^2$ ko‘rinishda olsa bo‘ladi. Unda vektor potensial

$$\vec{b}=\{b_1,b_2,0\}=\left\{-\frac{z^2}{2},-2yz+x^2,0\right\}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. ◀

5.3. Garmonik maydon

Garmonik skalyar maydon.

Agar f skalyar maydon

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=0$$

Laplas tenglamasini qanoatlantirsa bunday maydon ***garmonik*** maydon deyiladi.

Laplas tenglamasining o‘ng tomonidagi ifodaga Laplas operatori deyiladi va Δf ko‘rinishda belgilanadi.

Dekart koordinatalar sistemasida Laplas tenglamasi

$$\Delta f=f''_{xx}+f''_{yy}+f''_{zz}=0,$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Misol. $f(r)=\dfrac{1}{r}$ funksiyaning R_3 da, $f(r)=\ln r$ funksiyaning R_2 da garmonik bo‘lishini ko‘rsating.

▷ 1)Gradient xossasiga ko‘ra $\operatorname{grad}\frac{1}{r}=\left(\frac{1}{r}\right)'\operatorname{grad}r=-\frac{1}{r^2}\frac{\vec r}{r}=-\frac{\vec r}{r^3}$.

Divergensiya xossasiga ko‘ra

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)=\operatorname{div}\left(\frac{-1}{r^3}\vec r\right)=-\left(\frac{1}{r^3}\operatorname{div}\vec r+\left(\vec r,\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\right)\right).$$

$\vec r=\{x,y,z\}$ uchun R_3 da $\operatorname{div}\vec r=3$ ekanligini va $\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}=\frac{-3}{r^4}\frac{\vec r}{r}$ dan

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)=-\left(\frac{3}{r^3}-\left(\vec r,\vec r\frac{3}{r^5}\right)\right)=0,$$

bo‘ladi.

2) R_2 da $f(r)=\ln r$ maydon uchun

$$\operatorname{grad}\ln r=(\ln r)'\operatorname{grad}r=\frac{1}{r}\frac{\vec r}{r^2},\quad \vec r=\{x,y\},\ \operatorname{div}\vec r=2,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\ln r)=\operatorname{div}\left(\frac{1}{r^2}\vec r\right)=\frac{1}{r^2}\operatorname{div}\vec r+\left(\vec r,grad\frac{1}{r^2}\right)=\frac{2}{r^2}+\left(\vec r,\frac{-2}{r^3}\frac{\vec r}{r}\right)=0.$$ ◀

Garmonik vektor maydon

Agar $\vec a$ vektor maydon bir vaqtda ham potensial ham solenoidal bo‘lsa bunday maydonlarga ***garmonik*** vektor maydonlar deyiladi.

Garmonik vektor maydonning xossalari.

1) garmonik vektor maydon skalyar va vektor potensialga ega bo‘ladi.

2) u skalyar potensial garmonik funksiya bo‘ladi.

3) garmonik vektor $\vec a=\{a_x,a_y,a_z\}$ maydon uchun uning komponentalari a_x,a_y,a_z garmonik funksiyalar bo‘ladi.

Bu xossalarni tekshiramiz.

1) birinchi xossa ta’rifdan kelib chiqadi. Chunki potensial maydon skalyar potensialga ega bo‘ladi, solenoidal maydon esa vektor potensialga ega bo‘ladi.

2)garmonik $\vec a$ maydon potensial maydon bo‘lgani uchun skalyar U potensial mavjud va $\vec a=\operatorname{grad}U$ ko‘rinishda bo‘ladi. Ikkinchi tomondan garmonik maydon solenoidal bo‘ladi, shuning uchun

$$\operatorname{div}\vec a=\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)=0$$

bo‘ladi. Shuning uchun garmonik $\vec a$ maydonning potensiali U Laplas tenglamasini qanoatlantiradi va garmonik funksiya bo‘ladi.

3) garmonik $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ maydon uchun uning potensialligidan $\mathrm{rot}\vec{a}=0$, ya'ni $\mathrm{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}=0$ yoki

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=\frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_z}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial z},\ \frac{\partial a_y}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial y} \qquad (5.6)$$

Garmonik vektor maydonning solenoidalligidan $\mathrm{div}\vec{a}=0$ bo'ladi. Yoki $\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=0$. Bu tenglikni x bo'yicha differensiallasak,

$$\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)=0$$

(5.6) tenglikning ikkinchi va uchinchilaridan foydalansak,

$$\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}=0.$$

Yani a_x funksiya garmonik ekan. Xuddi shuningdek, a_y, a_z funksiyalar ham garmonik bo'ladi.

5.4. Vektor maydonning takroriy amallari

div, grad, rot amallarga maydonning birinchi tartibli amallari deyiladi. Bu amallarni ixtiyoriy ketma-ketlikda kombinasiyalarini olganimizda takroriy amalllar hosil bo'ladi. Ularning ba'zilari ma'noga ega emas (5.1 –jadval).

	Skalyar maydon U	Vektor maydon $\vec{a}$	
	grad	div	rot
grad	Aniqlanmagan	grad div$\vec{a}$	Aniqlanmagan
div	divgrad$U$	Aniqlanmagan	div rot $\vec{a}$
rot	rotgrad$U$	Aniqlanmagan	rot rot $\vec{a}$

Jadvalda keltirilgan amallarni kengroq yoritaylik.

div(grad$U$) ifodaning ΔU Laplas operatorligini yuqorida ko'rgan edik.

grad$U$ potensial maydon bo'lgani uchun undan olingan rotor nolga teng: $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}U)=0$.

$\text{rot}\,\vec{a}$ maydon solenoidal bo'lgani uchun solenoidal maydonda divergensiya nolga teng: $\text{div}(\text{rot}\,\vec{a})=0$.

$\text{grad}(\text{div}\,\vec{a})$ va $\text{rot}(\text{rot}\,\vec{a})$ ifodalar elektrodinamikada ishlatiladi bular orasida quyidagi munosabat o'rinli (uni keyin ko'rsatamiz)

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{a})=\text{grad}\,\text{div}\,\vec{a}-\text{div}\,\text{grad}\,\vec{a} \tag{5.7}$$

Bu yerda $\text{div}\,\text{grad}\,\vec{a}=\Delta\vec{a}$ bo'lib, uni $\Delta\vec{a}=\{\Delta a_x,\Delta a_y,\Delta a_z\}$ ko'rinishda tushunish kerak.

Shunday qilib,

$$\text{div}(\text{grad}\,U)=\Delta U,\quad \text{rot}(\text{grad}\,U)=0,\quad \text{div}(\text{rot}\,\vec{a})=0,$$

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{a})=\text{grad}\,\text{div}\,\vec{a}-\text{div}\,\text{grad}\,\vec{a}$$

5.5. Nabla operatori

Vektor analizining grad, div, rot differensial amallarini simvolik $\vec{\nabla}$ vektor yordamida (Nabla vektor – Gamilton operatori) ifodalash qulaydir:

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

1) ∇ nabla – vektorning u(M) skalyar funksiyaga ko'paytmasi shu funksiyaning gradientini beradi:

$$\vec{\nabla}u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\text{grad}u$$

Demak, grad $u=\vec{\nabla}u$.

2) $\vec{\nabla}$ nabla – vektorning

$$\vec{a}(\text{M})=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$$

vektor – funksiya bilan skalyar ko'paytmasi shu funksiyaning divergensiyasini beradi.

$$\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\text{div}\,\vec{a}$$

Demak, $\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)=\text{div}\,\vec{a}$

3) $\vec{\nabla}$ nabla – vektorning

$$\vec{a}(\text{M})=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$$

vektor funksiyaga vektor ko'paytmasi shu funksiyaning uyurmasini beradi :

$$\left[\vec{\nabla},\vec{a}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}=\operatorname{rot}\vec{a}$$

Demak,

$$\left[\vec{\nabla},\vec{a}\right]=\operatorname{rot}\vec{a}$$

4) skalyar maydon u ning Laplas operatori Δ uchun $\Delta u=\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}u\right)=\vec{\nabla}^2 u$ yoki simvolik ko‘rinishda $\Delta=\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)=\vec{\nabla}^2$

5) yo‘nalish bo‘yicha hosila

$\dfrac{\partial u}{\partial l}=\left(\vec{l}^{\,0},\operatorname{grad}u\right)=\left(\vec{l}^{\,0},\vec{\nabla}u\right)=\left(\vec{l}^{\,0},\vec{\nabla}\right)u$ yoki simvolik ko‘rinishda $\dfrac{\partial}{\partial l}=\left(\vec{l}^{\,0},\vec{\nabla}\right)$.

$\vec{\nabla}$ operatorini foydalanishda uning vektor va differensial tabiatini hisobga olish kerak.

$\vec{\nabla}$ operatorini o‘zgaruvchilar ko‘paytmasi qatnashmagan ifodaga ishlatilishi.

Nabla operatorini o‘zgaruvchilar ko‘paytmasi qatnashmagan ifodaga ishlatish vektor algebrasi qoidalariga mos keladi. Shuni nazarda tutish lozimki, $\vec{\nabla}$ operator ta’sir qiluvchi obyekt undan keyin turishi kerak.

Buni quyidagi misollarda tushintiramiz.

1) $\vec{c}$ o‘zgarmas vektor bo‘lsin. $\operatorname{rot}(u\vec{c})=\left[\vec{\nabla},u\vec{c}\right]=\left[\vec{\nabla}u,\vec{c}\right]=\left[grad\,u,\vec{c}\right]$.
Bu yerda u o‘zgaruvchi $\vec{\nabla}$ yoniga vektorga vektorlar algebrasi qoidalariga ko‘ra o‘tkazilgan (vektor ko‘paytma xossasiga ko‘ra u skalyarni ikkinchi vektordan birinchi vektor qoshiga o‘tkazish mumkin).

2) $\vec{\nabla}$ operatordan foydalanib (5.7) formulani keltirib chiqarish mumkin:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},a\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{a}\right)-\left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\right)\vec{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}-\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{a}.$$

Bu yerda biz ikkilangan vektor ko‘paytma xossasidan foydalandik:

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right)-\left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}.$$

Yuqorida keltirilganga ko‘ra $\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{a}=\Delta\vec{a}=\{\Delta a_x,\Delta a_y,\Delta a_z\}$.

3) yana shu narsani ko‘zdan qochirmaslik kerakki, $\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)\neq\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)$.
$\left(\vec{\nabla}\vec{a}\right)=\operatorname{div}\vec{a}=\dfrac{\partial a_x}{\partial x}+\dfrac{\partial a_y}{\partial y}+\dfrac{\partial a_z}{\partial z}$ bo‘lib, u funksiyadan iborat. $\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)$ esa differensial operatordir: $\left(\vec{a},\vec{\nabla}\right)=a_x\dfrac{\partial}{\partial x}+a_y\dfrac{\partial}{\partial y}+a_z\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Xuddi shuningdek, $(\vec{\nabla},\vec{\nabla})\vec{a} \neq \vec{a}(\vec{\nabla},\vec{\nabla})$.

4) shu narsani nazarda tutish kerakki: a) $\vec{\nabla}$ oddiy vektor emas. U yo'nalishga ham uzunlikka ham ega emas. b) $[\vec{\nabla},\vec{a}]$ $\vec{a}$ ga perpendikulyar emas. d) $\vec{\nabla}u, \vec{\nabla}v$ vektorlar kolleniar emas. $\vec{\nabla}u$ vektor $u = \text{const}$ sath sirtga normal bo'yicha yo'nalgan $\vec{\nabla}v$ esa $v = \text{const}$ sath sirtga normal bo'yicha yo'nalgandir.

Bu misollar shuni ko'rsatadiki habla operatori bilan ishlash jarayonida ehtiyot bo'lish kerak. Agar olingan natijaga ishonch bo'lmasa $\vec{\nabla}$ operatordan foydalanmasdan bevosita keltirib chiqarish kerak.

Bu vektorni u yoki bu (skalyar yoki vektor) kattalikka qo'llanishini bunday tushunmoq kerak: vektor algebrasi qonunlariga ko'ra bu vektorni berilgan kattalikka ko'paytirish amalini bajarish lozim, so'ngra $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ simvollarning bu kattalikka ko'paytirishni tegishli hosilani topish sifatida qarash kerak.

Bu vektor bilan amallar bajarish qoidalarini qarab chiqamiz.

$\vec{\nabla}$ ***operatorini o'zgaruvchilar ko'paytmasi qatnashgan ifodaga ishlatilishi.***

Bunday holda avvalo, nabla operatorining differensial xossasi, ya'ni ko'paytmadan hosila olish qoidasi ishlaydi.

$\vec{\nabla}$ *operatorini o'zgaruvchilar ko'paytmasi qatnashgan ifodaga ishlatilishi natijasida ko'paytuvchilar yig'indisi hosil bo'lib, vektor algebrasi qoidalarini saqlagan holda* $\vec{\nabla}$ *faqat yig'iddagi obyektning faqat biriga ta'sir qiladi va* $\vec{\nabla}$ *dan keyin joylashadi.*

Bu qoidani misollarda tushintiramiz.

1) u funksiya va $\vec{a}$ o'zgaruvchan vektor bo'lsin. Unda

$$\operatorname{div}(u\vec{a}) = (\nabla, u\vec{a}) = (\nabla, \underline{u}\vec{a}) + (\nabla, u\underline{\vec{a}}).$$

Har bir yig'indida $\vec{\nabla}$ tagiga chizilgan obyektlarga ta'sir qiladi. Tagiga chizilgan obyektlarni $\vec{\nabla}$ ning yoni va o'ng tomoniga joylashtirish uchun skalyar ko'paytma xossasidan foydalanamiz: skalyarni ikkinchi vektordan birinchisiga o'tkazish mumkin va skalyarni skalyar ko'paytma belgisidan tashqariga chiqarish mumkin. Shuning uchun

$$\operatorname{div}(u\vec{a}) = (\nabla, u\vec{a}) = (\nabla, \underline{u}\vec{a}) + (\nabla, u\underline{\vec{a}}) = (\nabla\underline{u}, \vec{a}) + u(\nabla, \underline{\vec{a}}) = (\operatorname{grad} u, \vec{a}) + u\operatorname{div}\vec{a}.$$

2) $\vec{a}, \vec{b}$ o'zgaruvchan vektorlar bo'lsin. Unda

$$\operatorname{div}[\vec{a}\vec{b}] = (\vec{\nabla}, [\vec{a}, \vec{b}]) = (\vec{\nabla}, [\underline{\vec{a}}, \vec{b}]) + (\vec{\nabla}, [\vec{a}, \underline{\vec{b}}])$$

Tagiga chizilgan vektorni $\vec{\nabla}$ ning chap yoniga joylashtirish uchun vektor ko'paytma xossasi $\left[\vec{a},\underline{\vec{b}}\right]=-\left[\underline{\vec{b}},\vec{a}\right]$ va aralash ko'paytma xossasi $\left(\vec{\nabla},\left[\underline{\vec{a}},\vec{b}\right]\right)=\left(\left[\vec{\nabla},\vec{a}\right],\vec{b}\right)$, $\left(\vec{\nabla},\left[\underline{\vec{b}},\vec{a}\right]\right)=\left(\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{b}}\right],\vec{a}\right)$ dan foydalanamiz. Shuning uchun

$$\left(\vec{\nabla},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\underline{\vec{a}},\vec{b}\right]\right)+\left(\vec{\nabla},\left[\vec{a},\underline{\vec{b}}\right]\right)=\left(\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{a}}\right],\vec{b}\right)-\left(\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{b}}\right],\vec{a}\right)=\left(\vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}\right)-\left(\vec{a}\,\mathrm{rot}\,\vec{b}\right)$$

Tayanch iboralar:

Potensial maydon, solenoidal maydon, garmonik maydon, ikkinchi tartibli amallar, Nabla operatori.

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday maydon potensial maydon deyiladi?
2. Qanday shartda maydon solenoidal bo'ladi?
3. Garmonik maydon deb qanday maydonga aytiladi?
4. Ikkinchi tartibli amallarning qaysilari ma'noga ega?
5. Nabla operatori qanday operator va nimaga kerak?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. I tokning oz o'qi bo'ylab yo'nalganda hosil qilgan magnit maydoni

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{-\frac{y}{\rho^2},\frac{x}{\rho^2},0\right\},\ \left(\rho^2=x^2+y^2\right)$$

ko'rinishda topiladi. Shu maydonning potensialligini aniqlang.

2. $\vec{a}=2xy\vec{i}+\left(x^2+1\right)\vec{j}$ maydonnig potensialligini tekshiring agar potensialli bo'lsa potensialini toping.

3. $(\vec{c}\nabla)\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},(\vec{c}\nabla)\vec{b}\right]-\left[\vec{b},(\vec{c}\nabla)\vec{a}\right]$ munosabatni isbotlang.

4. Faqat x ga bog'liq garmonik maydonlarni toping.

5. $u=\ln r$, $r^2=x^2+y^2+z^2$ maydonning garmonikligini tekshiring.

6. Vektor tahlilning egri chiziqli koordinatalar sistemasidagi asosiy amallari

- *Egri chiziqli koodinatalar*
- *Egri chiziqli koordinatalar sistemasida vektor analizning asosiy amallari*

6.1. Egri chiziqli koodinatalar

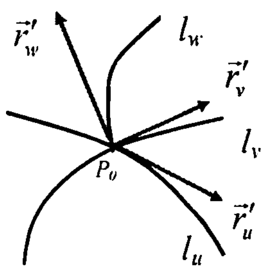
Ko'p hollarda nuqtaning holatini Dekart sistemasidagi (x,y,z) koordinatalar orqali emas, balki egri chiziqli koordinatalar deb ataluvchi (u,v,w) uchlik orqali ifodalash qulaylik tug'diradi.

Dekart koordinatalar sistemasi bilan egri chiziqli koordinatalar sistemasi orasidagi bog'lanish ma'lum bo'lsin: $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ yoki vektor shaklda $\vec{r} = \vec{r}(u,v,w)$.

Koordinata chiziqlari va sirtlari tushunchasini kiritamiz.

Biror koordinata o'zgarmas qiymatga teng bo'lgandagi sirtlarga *koordinata sirtlari* deyiladi, masalan, $u = \text{const}$, yoki $v = \text{const}$, yoki $w = \text{const}$.

l_u koordinata chizig'i shunday chiziqki, unda u koordinata o'zgaruvchan bo'lib, v,w lar o'zgarmas bo'ladi: $v = v_0$, $w = w_0$. Unda $\vec{r} = \vec{r}(u,v_0,w_0)$ l_u chiziqning parametrik tenglamasidan iborat bo'ladi. $\vec{r}'_u(u_0,v_0,w_0)$ vektor l_u chiziqning $P_0(u_0,v_0,w_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma vektoridan iborat bo'ladi (6.1 – rasm).



6.1 - rasm

l_v koordinata chizig'i shunday chiziqki unda v koordinata o'zgaruvchan bo'lib, u,w lar o'zgarmas bo'ladi: $u = u_0$, $w = w_0$. Unda $\vec{r} = \vec{r}(u_0,v,w_0)$ l_v chiziqning parametrik tenglamasidan iborat bo'ladi. $\vec{r}'_v(u_0,v_0,w_0)$ vektor l_v chiziqning $P_0(u_0,v_0,w_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma vektoridan iborat bo'ladi (6.1 – rasm).

Xuddi shuningdek, l_w koordinata chiziq'i va $\vec{r}'_w$ urinma vektor aniqlanadi.

Ikki koordinata tekisliklarining kesishishidan koordinata chizigi hosil bo‘ladi, masalan, l_w chizig‘i $u=u_0$ va $v=v_0$ koordinata chiziqlarining kesishihsi natijasidir.

$\vec{r}_u', \vec{r}_v', \vec{r}_w'$ vektorlar egri chiziqli koordinatalar sistemasida bazis tashkil qiladi. Bir nuqtadan ikkinchisiga o‘tganda bular o‘zgarganligi uchun ularni *lokal bazislar* deyiladi.

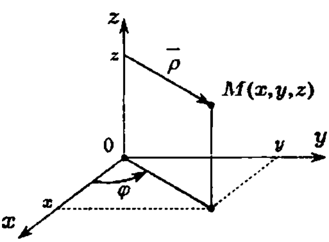
$\vec{r}_u', \vec{r}_v', \vec{r}_w'$ vektorlar ortagonal bo‘lsa ularni ***ortoganal bazis*** deyiladi. Quyidagi vektorlar esa

$$\vec{e}_u=\frac{\vec{r}_u'}{|\vec{r}_u'|}=\frac{\vec{r}_u'}{H_u},\quad \vec{e}_v=\frac{\vec{r}_v'}{|\vec{r}_v'|}=\frac{\vec{r}_v'}{H_v},\quad \vec{e}_w=\frac{\vec{r}_w'}{|\vec{r}_w'|}=\frac{\vec{r}_w'}{H_w},\tag{6.1}$$

ortonormallashgan bazisni tashkil qiladi. $H_u=|\vec{r}_u'|$, $H_v=|\vec{r}_v'|$, $H_w=|\vec{r}_w'|$, munosabatlarga ***Lame kooeffisientlari*** deyiladi.

Silindrik koordinatalar sistemasi. M nuqtaning silindrik koordinatalari quyidagicha aniqlanadi (6.2 – rasm):

- $\rho - M$ nuqtadan Oz o‘qigacha bo‘lgan masofa ($0\le\rho<+\infty$);
- $\varphi - xOz$ tekisligi va M nuqta va Oz o‘qidan o‘tuvchi tekisliklar orasidagi burchak ($0\le\varphi<2\pi$);
- $z-$ Dekart koordinataning z koordinatasi bilan mos keladi ($-\infty<z<+\infty$).



6.2 - rasm

Silindrik koordinatalar sistemasida koordinata sirtlari:

$\rho=\text{const}$ - simmetriya o‘qi Oz bo‘lgan aylanma silindrlar (6.3 a – rasm),

$\varphi=\text{const}$ - Oz o‘qidan o‘tadigan yarim tekislik (6.3 b – rasm),

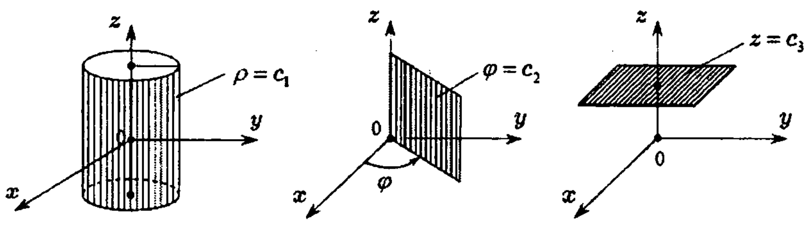
$z=\text{const}$ - Oz o‘qiga perpendikulyar tekislik (6.3 d – rasm).

Koordinata chiziqlari:

l_ρ - Oz o‘qiga perpendikulyar va undan chiqadigan nurlar,

l_φ - markazi Oz o‘qida joylashgan $z=\text{const}$ tekislikda yotgan aylanalar,

l_z - Oz o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar.



a) *b)* *d)*

6.3 - rasm

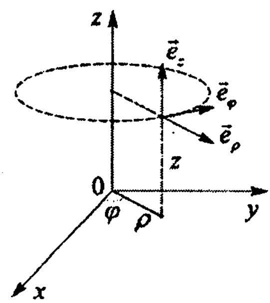
Koordinata chiziqlari 6.4 – rasmda keltirilgan.

Dekart va silindrik koordinatalar orasidagi munosabat $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$ yoki vektor shaklda $\vec{r}=\{\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z\}$ ko‘nishda bo‘ladi (6.2 –rasm).

Koordinata chiziqlariga urinma bo‘ylab yo‘nalgan silindrik sistemaning lokal bazislari:

$\vec{r}_\rho{}'=\{\cos\varphi,\sin\varphi,0\},\ \vec{r}_\varphi{}'=\{-\rho\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi,0\},\ \vec{r}_z{}'=\{0,0,1\}.$

$\left(\vec{r}_\rho{}',\vec{r}_\varphi{}'\right)=0,\ \left(\vec{r}_\rho{}',\vec{r}_z{}'\right)=0,\ \left(\vec{r}_\varphi{}',\vec{r}_z{}'\right)=0$



6.4 - rasm

bo‘lgani uchun $\vec{r}_\rho{}',\vec{r}_\varphi{}',\ \vec{r}_z{}'$ ortoganal bazisni tashkil qiladi. (6.1) formuladan Lame koeffitsiyentlar va ortonormallashgan bazisni topamiz:

$$H_\rho=\left|\vec{r}_\rho{}'\right|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+0}=1,\ H_\varphi=\left|\vec{r}_\varphi{}'\right|=\sqrt{(-\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2+0}=\rho,$$

$$H_z=\left|\vec{r}_z{}'\right|=1,\ \vec{e}_\rho=\frac{\vec{r}_\rho{}'}{H_\rho}=\vec{r}_\rho{}',\ \vec{e}_\varphi=\frac{\vec{r}_\varphi{}'}{H_\varphi}=\frac{1}{\rho}\vec{r}_\varphi{}',\ \vec{e}_z=\frac{\vec{r}_z{}'}{H_z}=\vec{r}_z{}'.$$

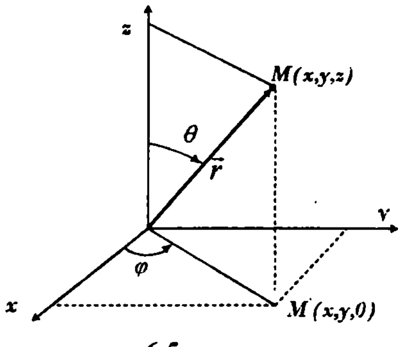
Shunday qilib, silindrik koordinatalar sistemasida Lame koeffitsiyentlari va ortonormallashgan bazis

$$H_\rho=1,\ H_\varphi=\rho,\ H_z=1, \tag{6.2}$$

$$\vec{e}_\rho=\{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0\},\ \vec{e}_\varphi=\{-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\},\ \vec{e}_z=\{0,0,1\} \tag{6.3}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Sferik koordinatalar sistemasi. *M* nuqtaning sferik koordinatalari quyidagicha aniqlanadi (6.5 – rasm):



6.5 - rasm

• $r - M$ nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofa ($0 \le r < +\infty$);

• $\theta - Oz$ o'qidan $\vec{r}$ vektor orasidagi burchak ($0 \le \theta < \pi$);

• $\varphi - xOz$ tekisligi va Oz o'qi hamda M nuqtadan o'tadigan tekisliklar orasidagi burchak ($0 \le \varphi < 2\pi$).

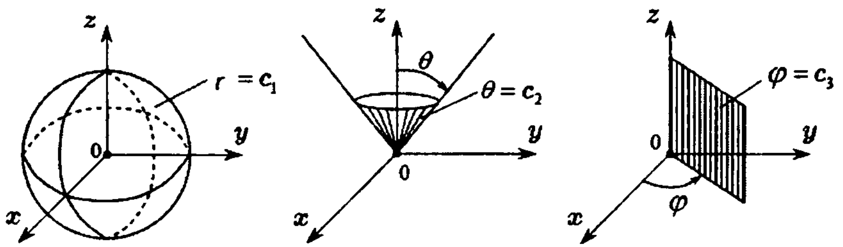
Sferik koordinatalar sistemasida koordinata sirtlari:

$r = \text{const}$ - markazi koordinata boshida joylashgan sferalar (6.6a – rasm),

$\theta = \text{const}$ - simmetriya o'qi oz o'qida joylashgan yarim konuslar (6.6 b –rasm),

$\varphi = \text{const}$ - Oz o'qidan o'tadigan yarim tekislik (6.6 d – rasm).

Koordinata chiziqlari (6.7- rasm):



a) b) d)

6.6 – rasm

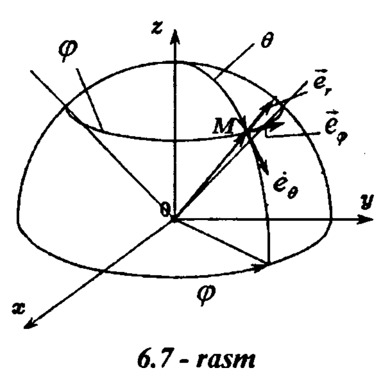
l_r - koordinata boshidan chiqadigan nurlar,

l_θ - sferadagi meridianlar,

l_φ - sferadagi parallellar.

Dekart va sferik koordinatalar orasidagi munosabat $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ (6.7-rasm) ko'rinishga ega.

Koordinata chiziqlariga urinma bo'ylab yo'nalgan sferik sistemaning lokal bazislari:



6.7 - rasm

$$\vec{r}_r' = \{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\},$$
$$\vec{r}_\theta' = \{r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta\},$$
$$r_\varphi' = \{-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0\}.$$

Bu vektorlarning skalyar ko'paytmalari nolga teng bo'lgani uchun ortogonal bazisni tashkil qiladi. (6.1) formulaga ko'ra Lame koeffitsiyentlari ortonormallashgan bazisni topamiz:

$$H_r = \left|\vec{r}_r'\right| = \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + \cos^2\theta} = 1,$$

$$H_\theta = \left|\vec{r}_\theta'\right| = \sqrt{(r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-r\sin\theta)^2} = r,$$

$$H_\varphi = \left|\vec{r}_\varphi'\right| = \sqrt{(-r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\cos\varphi)^2 + 0} = r\sin\theta,$$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}_r'}{H_r} = \vec{r}_r', \ \vec{e}_\theta = \frac{\vec{r}_\theta'}{H_\theta} = \frac{1}{r}\vec{r}_\theta', \ \vec{e}_\varphi = \frac{\vec{r}_\varphi'}{H_\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\vec{r}_\varphi'.$$

Shunday qilib, sferik koordinatalar sistemasida Lame koeffitsiyentlari va ortonormallashgan bazis

$$H_r = 1, \ H_\theta = r, \ H_\varphi = r\sin\theta, \tag{6.4}$$

$$\vec{e}_r = \{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\}, \ \vec{e}_\theta = \{\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\},$$
$$\vec{e}_\varphi = \{-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\} \tag{6.5}$$

ko'rinishda bo'ladi.

6.2. Egri chiziqli koordinatalar sistemasida vektor analizning asosiy amallari

Ortogonal koordinatalar sistemasida gradient

Ortonormallashgan $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ bazisli egri chiziqli koordinatalar sistemasida $f(u,v,w)$ skalyar maydon berilgan bo'lsin. $\vec{b} = \operatorname{grad} f$ vektorni shu bazis bo'yicha yoyamiz

$$\operatorname{grad} f = \vec{b} = b_u\vec{e}_u + b_v\vec{e}_v + b_w\vec{e}_w.$$

Ortonormallashgan bazisda vektor komponentalari vektorning bazis vektordagi proeksiyasiga teng:

$$b_u = \operatorname{pr}_{\vec{e}_u} \operatorname{grad} f = (\vec{e}_u, \operatorname{grad} f) = \left(\frac{\vec{r}_u'}{\left|\vec{r}_u'\right|}, \operatorname{grad} f\right) = \frac{1}{H_u}\left(\{x_u', y_u', z_u'\}, \{f_x', f_y', f_z'\}\right) =$$

$$= \frac{1}{H_u}\left(f_x' x_u' + f_y' y_u' + f_z' z_u'\right) = \frac{1}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Xuddi suningdek,

$$b_v=\frac{1}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v},\ b_w=\frac{1}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Shunday qilib,

$$grad\, f=\frac{1}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}\vec{e}_u+\frac{1}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v}\vec{e}_v+\frac{1}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w}\vec{e}_w \quad (6.6)$$

Xususan, silindrik koordinatalarda

$$grad\, f=\frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial f'}{\partial z}\vec{e}_z \quad (6.7)$$

Sferik koordinatalarda

$$grad\, f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \quad (6.8)$$

1-misol. Silindrik koordinatalar sistemasida berilgan $u=\rho+z\cos\varphi$ skalyar maydonning gradientini hisoblang.

▷ (6.7) formuladan va silindrik koordinatalar sistemasidagi Lame kooeffisientlaridan $\mathrm{grad}u=\vec{e}_\rho-\frac{z\sin\varphi}{\rho}\vec{e}_\varphi+\cos\varphi\vec{e}_z$ kelib chiqadi.

Ortogonal koordinatalarda vektor chiziqlari

Biror ortogonal koordinatalar sistemasida $\vec{a}=a_u\vec{e}_u+a_v\vec{e}_v+a_w\vec{e}_w$, vektor maydon berilgan bo'lsin. Vektor chiziqlari shunday chiziqki, uning har bir nuqtasida $d\vec{r}$ urinma vektor $\vec{a}$ vektor maydonga kolleniar bo'ladi.

$$d\vec{r}=\vec{r}_u{}'du+\vec{r}_v{}'dv+\vec{r}_w{}'dw,\ \vec{r}_u{}'=\left|\vec{r}_u{}'\right|\vec{e}_u=H_u\vec{e}_u,\ \vec{r}_v{}'=H_v\vec{e}_v,\ \vec{r}_w{}'=H_w\vec{e}_w$$

munosabatlardan

$$d\vec{r}=(H_udu)\vec{e}_u+(H_vdv)\vec{e}_v+(H_wdv)\vec{e}_w \quad (6.9)$$

kelib chiqadi.

$d\vec{r}$ va $\vec{a}$ vektorning koleniarligidan

$$\frac{H_udu}{a_u}=\frac{H_vdv}{a_v}=\frac{H_wdw}{a_w} \quad (6.10)$$

Demak, $\vec{a}$ maydonning vektor chiziqlarini topish uchun (6.10) differensial tenglamalar sistemasi kelib chiqdi.

2*–misol.* Silindrik koordinatalar sistemasida berilgan $\vec{a}=\rho\varphi\vec{e}_\varphi+z\vec{e}_z$ maydonning vektor chiziqlarini toping.

▷ (6.10) tenglamalar sistemasidan foydalanamiz, $\frac{H_\rho d\rho}{a_\rho}=\frac{H_\varphi d\varphi}{a_\varphi}=\frac{H_z dz}{a_z}$. (6.2) va $a_\rho=0,\ a_\varphi=\rho\varphi,\ a_z=z$, dan vektor chiziqlarining differensial tenglamasidan

$$\frac{d\rho}{0}=\frac{\rho d\varphi}{\rho\varphi}=\frac{dz}{z}\Rightarrow d\rho=0,\ \frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{dz}{z}\Rightarrow\begin{cases}\rho=c_1,\\ z=c_2\varphi.\end{cases}$$

Yani vektor chizqlari spirallardan iboratdir.◀

Ortogonal koordinatalarda chiziqli integral.

$\vec{a}$ vektor maydon va uning chiziqli integralini ko'raylik $\int\limits_L(\vec{a}\,d\vec{r})$.

$\vec{a}$ va $d\vec{r}$ vektorlarni ortonormallashgan $\vec{e}_u,\vec{e}_v,\vec{e}_w$ bazisda yoyaylik: $\vec{a}=a_u\vec{e}_u+a_v\vec{e}_v+a_w\vec{e}_w$, $d\vec{r}=(H_u du)\vec{e}_u+(H_v dv)\vec{e}_v+(H_w dw)\vec{e}_w$. Unda

$$\int\limits_L(\vec{a}\,d\vec{r})=\int\limits_L a_u H_u du+a_v H_v dv+a_w H_w dw. \qquad (6.11)$$

3-*misol.* Silindrik koordinatalarda berilgan $\vec{a}=\rho\sin\varphi\vec{e}_\rho-\rho^2 z\vec{e}_\varphi+\rho^2\vec{e}_z$ maydonning $x^2+y^2=R^2$, $z=h$ chiziq bo'yicha sirkulyatsiyasini toping.

▷ (6.11) formulani silindrik kordinatalarda yozamiz

$$\int\limits_L(\vec{a},d\vec{r})=\int\limits_L a_\rho H_\rho d\rho+a_\varphi H_\varphi d\varphi+a_z H_z dz.$$

Berilgan chiziqda $\rho=R, z=h$ bo'lgani uchun, $d\rho=0$, $dz=0$, $a_\varphi H_\varphi=-\rho^2 z\,\rho=-R^3h$,

$$\int\limits_L(\vec{a},d\vec{r})=\int\limits_L a_\varphi H_\varphi d\varphi=-R^3h\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=-2\pi R^3h.◀$$

Ortogonal koordinatalarda oqim

Orientirlangan S sirtdagi $\vec{a}$ vektor maydon oqimi $Q=\iint\limits_S(\vec{a},\vec{n})d\sigma$ formula orqali beriladi; bu yerda $\vec{n}$ S sirtga o'tkazilgan normal vektor.

S sirt $w=w_0$ sirtning biror bo'lagi bo'lgan holni qaraymiz. Bunday sirtning parametrik tenglamasi $\vec{r}=\vec{r}(u,v,w_0)$, $(u,v)\in S$ bo'ladi. Oqim

$$Q=\pm\iint\limits_S\left\{\left(\vec{a},\left[\vec{r}_u',\vec{r}_v'\right]\right)\right\}_{w=w_0}dudv,$$

formuladan aniqlanadi. Agar $\left[\vec{r}_u',\vec{r}_v'\right]$ vektor yonalishi $\vec{n}$ yo'nalishi bilan mos tushsa «+» ishorasi bilan qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa «-» ishorasi bilan olinadi. Integral ostidagi ifodada $\vec{r}_u'=\left|\vec{r}_u'\right|\vec{e}_u=H_u\vec{e}_u$, $\vec{r}_v'=H_v\vec{e}_v$, va ortonormallashgan bazisda $[\vec{e}_u,\vec{e}_v]=\vec{e}_w$, va $(\vec{a}\,\vec{e}_w)=a_w$ bo'ladi. Unda

$$\left(\vec{a},\left[\vec{r}_u',\vec{r}_v'\right]\right)=\left(\vec{a},[H_u\vec{e}_u,H_v\vec{e}_v]\right)=(\vec{a}\,\vec{e}_w)H_uH_w\Rightarrow$$

$$Q=\pm\iint_S (a_w H_u H_v)_{w=w_0}\, du dv. \qquad (6.12)$$

Bu yerda agar $\vec{n}$ vektor yo'nalishi $\vec{e}_w$ vektor yo'nalishi bilan mos kelsa «+» ishora bilan, aks holda «-» ishora bilan olinadi. (6.12) formula $w=w_0$ sirtning biror qismidan o'tadigan oqimni aniqlaydi.

Xuddi shuningdek, S sirt $u=u_0$ sirtning biror qismi bo'lsa, oqim

$$Q=\pm\iint_S (a_u H_v H_w)_{u=u_0}\, dv dw. \qquad (6.13)$$

formuladan aniqlanadi; agar $\vec{n}$ bilan $\vec{e}_u$ mos kelsa «+» ishora bilan, mos kelmasa «-» ishora bilan olinadi.

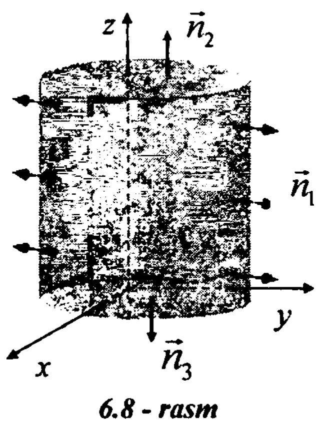
1*–misol.* $\vec{a}=\rho\vec{e}_\rho-\cos\varphi\vec{e}_\varphi+z\vec{e}_z$ vektor maydonning $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=3$ sirtlar bilan chegaralangan yopiq sirtning tashqi tomonidan o'tuvchi oqimni toping (6.8 –rasm).

▷ σ sirt σ_1, σ_2 va σ_3 sirtlar yig'indisidan iborat: σ_1- $x^2+y^2=4$ silidrik sirt yoki $\rho=2$, σ_2- silindrning pastki asosi $z=0$ va silindrning yuqori asosi $z=3$ dan iborat. Bu uch sirt silindrik koordinatalar sistemasining koordinat tekisliklaridan iborat. Shuning uchun (6.12) formuladan

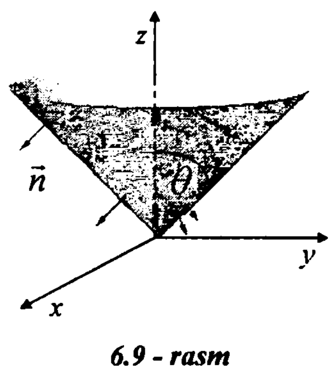
$$Q_{\sigma_1}=\pm\iint_S \left(a_\rho H_z H_\varphi\right)_{\rho=2} dz d\varphi=+\iint_S (\rho\,\rho)_{\rho=2} dz d\varphi=4\int_0^3 dz\int_0^{2\pi} d\varphi=24\pi,$$

$$Q_{\sigma_2}=\pm\iint_S \left(a_z H_\rho H_\varphi\right)_{z=0} d\rho d\varphi=-\iint_S (z\,\rho)_{z=0} d\rho d\varphi=0,$$

$$Q_{\sigma_3}=\pm\iint_S \left(a_z H_\rho H_\varphi\right)_{z=3} d\rho d\varphi=+\iint_S (z\,\rho)_{z=3} d\rho d\varphi=3\int_0^2 \rho d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi=12\pi,$$



6.8 - rasm



6.9 - rasm

Shunday qilib $Q=Q_{\sigma_1}+Q_{\sigma_2}+Q_{\sigma_3}=24\pi+0+12\pi=36\pi.$◀

2-*misol.* Sferik koordinatalar sistemasida berilgan $\vec{a} = r\vec{e}_r + r\sin\theta\vec{e}_\theta + r\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi$ maydonning $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konusning $z = 1$ tekislik bilan ajratilgan qismining tashqi tomonidan o'tuvchi oqimni toping (6.9-rasm).

▷ Konus sirti $\theta = \pi/4$ koordinatalar sirtining bir qismi (6.3-rasm). Shuning uchun (6.2) formulaga ko'ra

$$Q = \pm\iint_S \left(a_\theta H_r H_\varphi\right)_{\theta=\pi/4} dr d\varphi = +\iint_S (r\sin\theta r\sin\theta)_{\theta=\pi/4} dr d\varphi = \frac{1}{2}\iint_S r^2 dr d\varphi;$$

$\vec{e}_\theta$ vektor l_θ koordinata chizig'iga (sfera meridianasiga) urinma bo'ylab yo'nalgan va θ ning o'sish tomoniga yo'nalganligi uchun integral oldida «+» ishorasi olingan (tashqi normal $\vec{n}$ yo'nalishi bilan mos keladi).

Konus sirtida r $r = 0$(O nuqtada) dan $r = \sqrt{2}$ (A nuqtada) gacha o'zgaradi, shuning uchun,

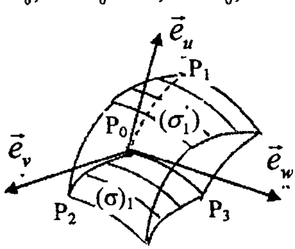
$$Q = \frac{1}{2}\iint_S r^2 dr d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi. ◀$$

Ortogonal koordinatalarda divergensiyani hisoblash

Divergensiyaning invariant ta'rifidan foydalanamiz:

$$(\operatorname{div}\vec{a})_{P_0} = \lim_{V \to P_0} \frac{Q}{V},$$

bu yerda V P_0 nuqtani o'z ichiga oluvchi hajm, Q - V hajmni o'rab turuvchi sirt bo'yicha oqim. Yopiq sirt sifatida $u = u_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0$, $v = v_0 + dv$, $w = w_0$, $w = w_0 + dw$ koordinata sirtlarini olish mumkin ((6.4) – rasm). σ_1 sirtda $u = u_0$, $\vec{n}_1 = -\vec{e}_u$; σ_1' sirtda $u = u_0 + du$, $\vec{n}_1' = +\vec{e}_u$; shuning uchun (6.3) formuladan



6.10-rasm.

$$Q_{\sigma_1} = -\iint_S (a_u H_v H_w)_{u=u_0} dv dw,$$

$$Q_{\sigma_1'} = +\iint_S (a_u H_v H_w)_{u=u_0+du} dv dw,$$

$$Q_{\sigma_1} + Q_{\sigma_1'} = \iint_S \left[(a_u H_v H_w)_{u=u_0+du} - (a_u H_v H_w)_{u=u_0}\right] du dw.$$

Teylor formulasi va or'ta qiymat haqidagi teoremani qo'llab,

$$Q_{\sigma_1}+Q_{\sigma_1'}=\iint\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_uH_vH_w)_{u=u_0}+o(du)\right]dudw=\frac{\partial}{\partial u}(a_uH_vH_w)_{P_0}\,dudvdw+o(dudvdw)$$

Xuddi huningdek, $v=v_0, \sigma_2$ sirt va $v=v_0+dv$, σ_2' sirtlar uchun ham

$$Q_{\sigma_2}+Q_{\sigma_2'}=\frac{\partial}{\partial v}(a_vH_uH_w)_{P_0}\,dudvdw+o(dudvdw);$$

$\sigma_3: w=w_0$, va $\sigma_3': w=w_0+dw$, sirtlar uchun esa,

$$Q_{\sigma_3}+Q_{\sigma_3'}=\frac{\partial}{\partial w}(a_wH_uH_v)_{P_0}\,dudvdw+o(dudvdw).$$

Barcha oqimlarni qo'shib, yopiq sirtdagi oqimni topamiz:

$$Q_\sigma=\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_uH_vH_w)_{P_0}+\frac{\partial}{\partial v}(a_vH_uH_w)_{P_0}+\frac{\partial}{\partial w}(a_wH_uH_v)_{P_0}\right]dudvdw+o(dudvdw).$$

Endi V hajmni hisoblaymiz (6.4 - rasm).

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\vec r_u'\,du+o(du),\ \overrightarrow{P_0P_2}=\vec r_v'\,dv+o(dv),\ \overrightarrow{P_0P_3}=\vec r_w'\,dw+o(dw),$$

tengliklardan

$$V=\left|\overline{P_0P_1}\right|\cdot\left|\overline{P_0P_2}\right|\cdot\left|\overline{P_0P_3}\right|=\left|\vec r_u'\right|\cdot\left|\vec r_v'\right|\cdot\left|\vec r_w'\right|dudvdw=H_uH_vH_w dudvdw.$$

U holda

$$\frac{Q_\sigma}{V}=\frac{\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_uH_vH_w)+\frac{\partial}{\partial v}(a_vH_uH_w)+\frac{\partial}{\partial w}(a_wH_uH_v)\right]dudvdw+o(dudvdw)}{H_uH_vH_w dudvdw+o(dudvdw)}.$$

Bu tenglikda limitga o'tib,

$$\operatorname{div}\vec a=\frac{1}{H_uH_vH_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_uH_vH_w)+\frac{\partial}{\partial v}(a_vH_uH_w)+\frac{\partial}{\partial w}(a_wH_uH_v)\right] \quad (6.14)$$

divergensiyaning egri chiziqli koordinatalardagi ifodasi kelib chiqadi. Xususan, silindrik koordinaltalarda divergensiya

$$\operatorname{div}\vec a=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho a_z)\right] \quad (6.15)$$

sferik koordinatalarda

$$\operatorname{div}\vec a=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2a_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, a_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi) \quad (6.16)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol. Silindrik koordinatalarda berilgan $\vec a=\rho\vec e_\rho-\cos\varphi\vec e_\varphi+z\vec e_z$ maydonning $\sigma: x^2+y^2=4,\ z=0, z=3$ yopiq sirtning tashqi tomidan o'tuvchi oqimini toping (6.2 - rasm).

▷ Sirt yopiq bo'lgani uchun Ostragradskiy-Gauss formulasidan foydalanamiz.

$$Q_\sigma = \oiint_\sigma (\vec{a}\vec{n})d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\vec{a}\,dV.$$

(6.15) formuladan divergensiyani hisoblaymiz

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho a_z)\right] =$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(-\cos\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho z)\right] = \frac{1}{\rho}(3\rho + \sin\varphi).$$

Silindrik koordinatalarda $dV = \rho d\rho d\varphi dz$ bo'lgani uchun,

$$Q_\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\vec{a}\,dV = \iint_S (3\rho + \sin\varphi)d\rho d\varphi \int_0^3 dz = 36\pi. \blacktriangleleft$$

Ortogonal koordinatalarda rotor

Rotorning invariant ta'rifidan ortoganal koordinatalar sistemasida rotorning (divergensiyani keltirib chiqarish kabi) ko'rinishini keltirib chiqarish mumkin:

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e}_u}{H_v H_w} & \dfrac{\vec{e}_v}{H_u H_w} & \dfrac{\vec{e}_w}{H_u H_v} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ a_u H_u & a_v H_v & a_w H_w \end{vmatrix}.$$

Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida rotorning ko'rinishlari:

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \dfrac{1}{\rho}\vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}, \quad \mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta} & \dfrac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ a_r & ra_\theta & r\sin\theta a_\varphi \end{vmatrix}..$$

Ortogonal sistemada Laplas operatori.

Laplas operatori $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f)$ ko'rinishga ega bo'lgani uchun (6.14) formuladan

$$\Delta f = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_v H_w}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_u H_w}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_u H_v}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right],$$

kelib chiqadi. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida Laplas operatorining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta f=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\Delta f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}, \qquad (6.17)$$

Misol. $\Delta f=0$ Laplas tenglamasining faqat r ga bog'liq bo'lgan barcha yechimlarini toping.

▷ f fiunksiya faqat r ga bog'liq bo'lib, θ va φ bog'liq bo'lmagani uchun (6.17) dan

$$\Delta f=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)=0$$

kelib chiqadi. Bu yerdan,

$$r^2\frac{\partial f}{\partial r}=C,\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{C}{r^2},\Rightarrow f(r)=\frac{C_1}{r}+C_2,$$

bu yerda C_1, C_2 ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.◀

Tayanch iboralar:

Egri chiziqli koordinatalar sistemasi, Lame koeffitsiyentlari, silindrik koordinatalar sistemasi, sferik koordinatalar sistemasi, $\mathrm{rot}\vec{a}, \mathrm{div}\vec{a}, \mathrm{grad}\vec{a}$ amallarning egri chiziqli koordinatalardagi ifodalari.

Takrorlash uchun savollar

1. Silindrik koordinatalar sistemasi qanday aniqlanadi?
2. Sferik koordinatalar sistemasi qanday aniqlanadi?
3. $\mathrm{div}\vec{a}$ amalining silindrik koordinatalardagi ifodasi qanday bo'ladi?
4. $\mathrm{rot}\vec{a}$ amalining sferik koordinatalardagi ifodasi qanday bo'ladi?
5. $\mathrm{grad}\vec{a}$ amalining silindrik koordinatalardagi ifodasi qanday bo'ladi?
6. $\mathrm{grad}\vec{a}$ amalining sferik koordinatalardagi ifodasi qanday bo'ladi?
7. Silindrik koordinatalar sistemasida Laplas operatori qanday yozilad?
8. Sferik koordinatalar sistemasida Laplas operatori qanday yozilad?

Mustaqil ish topshiriqlar

1. $\vec{a}=\{-y, x, 0\}$ maydonni silindik bazisda yozing.

2. $u=\rho^2+2\rho\cos\varphi-e^z\sin\varphi$ skalyar maydonning gradientini silindrik koordinatalar sistemasida toping.

3. $\vec{a}=\dfrac{2cos\theta}{r^3}\vec{e}_r+\dfrac{\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta$ maydonning sferik divergensiyasini koordinatalar sistemasida toping.

4. $\vec{a}=\vec{e}_\rho+\varphi\vec{e}_\varphi=\{1,\varphi,0\}$ maydonning vektor chiziqlarini toping.

5. $\vec{a}=\cos\theta/r^3\vec{e}_r+\sin\theta/r^3\vec{e}_\theta$ maydonning rotorini toping.

6. $f(r)$ funksiya qanday bo‘lganda $\vec{a}=f(r)\vec{e}_r$ markaziy maydon solenoidal bo‘ladi?

Kim matematikani bilmasa,
haqiqatni bilmaydi,
kim uni tushunmasa
zulmatda yashaydi.
R. Dekart

II bob. TENZOR HISOB ELEMENTLARI

7. Koordinatalar sistemasini burishda vektorlarni almashtirish

- ***Dekart koordinatalar sistemasida bazis.***
- ***Ortlarni almashtirish.***
- ***Vektor koordinatalarini almashtirish.***

7.1. Dekart koordinatalar sistemasida bazis

Tenzorlar bo'limida ortonormallashgan bazis vektorlarni belgilash uchun $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarni qaraymiz. Bu vektorlar ortonormallashgan bo'lgani uchun

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=(\vec{e}_2,\vec{e}_2)=(\vec{e}_3,\vec{e}_3)=1; \quad (\vec{e}_1,\vec{e}_2)=(\vec{e}_1,\vec{e}_3)=(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=0, \tag{7.1}$$

bo'ladi.

Agar Dekart koordinatalar sistemasining ortlari

$$[\vec{e}_1,\vec{e}_2]=\vec{e}_3, \quad [\vec{e}_2,\vec{e}_3]=\vec{e}_1, \quad [\vec{e}_3,\vec{e}_1]=\vec{e}_2 \tag{7.2}$$

tengliklar bilan bog'langan bo'lsa, bunday koordinatalar sistemasi o'ng sistemani tashkil qiladi, deyiladi.

Bunday belgilashlarda biror $\vec{a}$ vektor $\vec{e}_k$ dekart bazislar orqali

$$\vec{a}=\sum_{k=1}^{3} a_k \vec{e}_k \tag{7.3}$$

ko'rinishda yoziladi. Nuqtaning radius vektori esa

$$\vec{r}=\sum_{k=1}^{3} x_k \vec{e}_k \tag{7.4}$$

ko'rinishda bo'ladi.

(7.3) va (7.4) ifodalarda indeks k yig'ish indeksi uni o'zgartirish bilan (7.3) va (7.4) ifodalarning ma'nosi o'zgarmaydi: $\vec{a}=\sum_{k=1}^{3}a_k\vec{e}_k=\sum_{i=1}^{3}a_i\vec{e}_i=\sum_{m=1}^{3}a_m\vec{e}_m$.

Tenzorlarni bayon qilishda **Eynshteyn qoidasi** ishlatiladi: agar ifodada indeks takrorlanib kelsa, shu indeks bo'yicha yig'iladi $\sum$ belgisi tushirib yoziladi (uch o'lchovli fazoda indeks qiymati 1 dan 3 gacha o'zgaradi). Bu kelishuvdan keyin (7.3) va (7.4) ifodalar quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a}=a_i\vec{e}_i,\quad \vec{r}=x_i\vec{e}_i \tag{7.5}$$

Misol. $(\vec{e}_k,\vec{e}_k)$ ifodani hisoblang.

▷Indeks takrorlanib kelgani uchun

$$(\vec{e}_k,\vec{e}_k)=\sum_{k=1}^{3}(\vec{e}_k,\vec{e}_k)=(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+(\vec{e}_2,\vec{e}_2)+(\vec{e}_3,\vec{e}_3)=3$$

bo'ladi. ◀

Kroneker belgisi. Bu belgi quyidagicha aniqlanadi:

$$\delta_{ik}=\begin{cases}1, & agar\ i=k\ bo'lsa,\\ 0, & agar\ i\neq k\ bo'lsa.\end{cases} \tag{7.6}$$

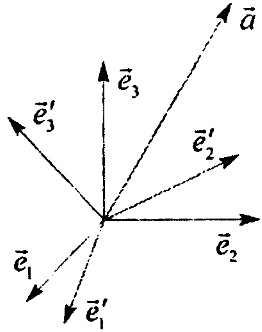
Kroneker belgisi 9 ta elementdan iborat birlik matritsani beradi:

$$\delta=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{7.7}$$

Kroneker belgisidan foydalanib ortonormallashgan bazis (7.1) ni qisqacha

$$(\vec{e}_i,\vec{e}_k)=\delta_{ik} \tag{0.1}$$

ko'rinishda yozish mumkin.



Misol. $\delta_{ik}x_k$ ifodani soddalashtiraylik.

▷ $$\delta_{ik}x_k=\sum_{k=1}^{3}\delta_{ik}x_k=\sum_{k\neq i}^{3}\delta_{ik}x_k+\delta_{ii}x_i$$

bo'lgani uchun (7.6) ga ko'ra

$$\delta_{ik}x_k=\sum_{k=1}^{3}\delta_{ik}x_k=\sum_{k\neq i}^{3}0\cdot x_k+1\cdot x_i=x_i$$

bo'ladi. Shuning uchun, $\delta_{ik}x_k=x_i$. ◀

7.2. Ortlarni almashtirish

$\vec{e}_k$ va $\vec{e}_k'$ Dekart bazis vektorlar berilgan bo'lsin (rasmga qarang). Bu bazis vektorlar orasidagi bog'lanishni topamiz.

Buning uchun $\vec{e}_k'$ bazisni $\vec{e}_k$ orqali va aksincha toyishni ko'raylik:

$$\vec{e}_k' = \alpha_{km}\vec{e}_m \tag{7.9}$$

$$\vec{e}_k = \beta_{km}\vec{e}_m'. \tag{7.10}$$

Bu yoyilmalarda k indeks erkin, m indeks esa yig'ish indeksidir. (7.9) ga ortlarni **to'gri almashtirish** (7.10) ga esa **teskari almashtirish** deyiladi. (7.10) ni (7.9) ga qo'ysak

$$\vec{e}_k' = \alpha_{km}(\beta_{mn}\vec{e}_n') = (\alpha_{km}\beta_{mn})\vec{e}_n' \tag{7.11}$$

(7.11) ifodaning chap va o'ng tomondaning bir xil ortlardagi koeffitsiyentlarini tenglab

$$\alpha_{km}\beta_{mn} = \delta_{kn} \tag{7.12}$$

tenglikka kelamiz. (7.12) to'g'ri va teskari almashtirish koeffitsiyentlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. (7.9) ning ikki tomonini $\vec{e}_l$ vektorga, (7.10) ni esa $\vec{e}_l'$ ga skalyar ko'paytirsak

$$(\vec{e}_k', \vec{e}_l) = \alpha_{km}(\vec{e}_m, \vec{e}_l) = \alpha_{km}\delta_{ml} = \alpha_{kl}, \tag{7.13}$$

$$(\vec{e}_k, \vec{e}_l') = \beta_{km}(\vec{e}_m', \vec{e}_l') = \beta_{km}\delta_{ml} = \beta_{kl}, \tag{7.14}$$

to'g'ri va teskari almashtirish koeffitsiyentlarini aniqlash imkoniyati paydo bo'ladi. (7.13) da indekslarni almashtirsak $k \leftrightarrow l$

$$(\vec{e}_l', \vec{e}_k) = \alpha_{lk} = (\vec{e}_k, \vec{e}_l'), \tag{7.15}$$

va buni (7.14) bilan taqqoslasak, to'g'ri va teskari almashtirishlarning koeffitsiyentlari orasidagi munosabatni topamiz:

$$\beta_{kl} = \alpha_{lk} \tag{7.16}$$

(7.16) dan foydalanaib (7.9) va (7.10) quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{e}_k' = \alpha_{km}\vec{e}_m \tag{7.17}$$

$$\vec{e}_k = \alpha_{mk}\vec{e}_m'. \tag{7.18}$$

(7.12) munosabatni esa

$$\alpha_{km}\alpha_{nm} = \delta_{kn} \tag{7.19}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Oxirgi tenglikni matritsa ko'rinishda ifodalash qulaydir. Buning uchun tenglikning chap tomonida shakl almashtiramiz:

$$\alpha_{km}\alpha_{nm} = \alpha_{km}\alpha_{mn}^T = (\alpha \cdot \alpha^T)_{kn}.$$

Shuning uchun,

$$(\alpha \cdot \alpha^T)_{kn} = \delta_{kn} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \alpha^T = E. \tag{7.20}$$

Bu yerda E birlik matritsa. (7.20) dan ko'rinadiki

$$\alpha^{-1} = \alpha^T. \tag{7.21}$$

Ya'ni, to'g'ri almashtirish matritsasi (α) ga teskari matritsa transponirlangan matritsaga teng bo'lar ekan.

$\det\alpha = \det\alpha^T$ va $\det E = 1$ bo'lgani uchun (7.20) dan $\det\alpha = \pm 1$ kelib chiqadi. Ya'ni ortogonal almashtirish determinanti +1 yoki -1 ga teng bo'ladi.

$\det\alpha = +1$ bo'lgan ortogonal almashtirishlarga **birinchi tur** $\det\alpha = -1$ bo'lgan almashtirishlarga esa **ikkinchi tur** almashtirishlar deyiladi. Bunday almashtirishlarga inversiya misol bo'ladi.

7.3. Vektor koordinatalarini almashtirish

(7.17) va (7.18) munosabatlar bilan bog'langan $\vec{e}_k$ va $\vec{e}\,'_k$ Dekart bazis vektorlar berilgan bo'lsin. Biror $\vec{a}$ vektorni qaraylik. Bu vektorning $\vec{e}_k$ bazisdagi yoyilmasi $\vec{a} = a_k\vec{e}_k$, $\vec{e}\,'_k$ bazisdagi yoyilmasi esa, $\vec{a} = a'_k\vec{e}\,'_k$ bo'lsin. O'z-o'zidan ravshanki

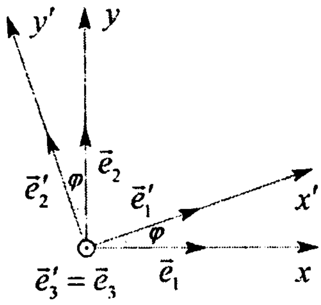
$$a_k\vec{e}_k = a'_k\vec{e}\,'_k. \tag{7.22}$$

(7.17) dan foydalanib $\vec{e}\,'_k$ bazisdan $\vec{e}_k$ bazisga o'tamiz:

$$a_k\vec{e}_k = a'_k\alpha_{km}\vec{e}_m,$$

Bu ifodaning chap tomonidagi indekslarni almashtirib $k \leftrightarrow m$, ortlarning chiziqli bog'lanmaganligini inobatga olsak

$$a_m = \alpha_{km}a'_k \tag{7.23}$$



munosabat kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, teskari almashtirish uchun esa

$$a'_m = \alpha_{mk}a_k. \tag{7.24}$$

(7.17), (7.18) munosabatlarni (7.23) va (7.24) lar bilan taqqoslasak, vektor koordinatalari ham bir bazisdan ikkinchisiga o'tganda ortlar kabi almashishligi kelib chiqadi. (7.23) almashtirishni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$a_m = \alpha^T_{mk}a'_k \tag{7.25}$$

1-*misol.* Dekart koordinatalar sistemsini ixtiyoriy burchakka burishda skalyar ko'paytmaning o'zgarmasligini ko'rsataylik.

▷ Buni isbotlash uchun (7.24) va (7.19) xossalardan foydalanamiz:

$$(\vec{a}\,',\vec{b}\,') = a'_i b'_i = \alpha_{ij}a_j\alpha_{ik}b_k = \alpha_{ij}\alpha_{ik}a_jb_k =$$
$$\delta_{jk}a_jb_k = a_kb_k = (\vec{a},\vec{b}).$$ ◄

2-*misol.* Koordinatalar sistemasini z o'qi atrofida φ burchakka burishdagi burish matritsasini quring.

▷ Ta'rifga ko'ra

$$\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\widehat{\vec e_1',\vec e_1}) & \cos(\widehat{\vec e_1',\vec e_2}) & \cos(\widehat{\vec e_1',\vec e_3})\\ \cos(\widehat{\vec e_2',\vec e_1}) & \cos(\widehat{\vec e_2',\vec e_2}) & \cos(\widehat{\vec e_2',\vec e_3})\\ \cos(\widehat{\vec e_3',\vec e_1}) & \cos(\widehat{\vec e_3',\vec e_2}) & \cos(\widehat{\vec e_3',\vec e_3})\end{pmatrix}$$

Bundan, z o'qi atrofida φ burchakka burganda (rasm ga qarang)

$$\alpha=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ko'rinishga kelamiz.◀

3-*misol.* Biror K sistemada $\vec a=\{0,\sqrt{2},2\}$ vektorning koordinatalari ma'lum bo'lsin. K sistemani z o'qi atrofida 45^0 ga burish natijasida K' sistema hosil qilingan bo'lsin. K' sistemada $\vec c'=\{1-\sqrt{2},1+\sqrt{2},1\}$ vektorning koordinatalari ma'lum bo'lsin. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi topilsin.

▷ Skalyar ko'paytma koordinatalar sistemasiga bog'liq bo'lmasligidan, misolni ikki usulda yechish mumkin. Birinchi usulda $\vec c$ vektor koordinatalarini K sistemada topib, $(\vec a,\vec c)$ skalyar ko'paytmani hisoblash; ikkinchi usulda $\vec a'$ topib, so'ng $(\vec a',\vec c')$ skalyar ko'paytmani hisoblash. Skalyar ko'paytma koordinatalar sistemasiga bog'iq bo'lmaganligi uchun $(\vec a,\vec c)=(\vec a',\vec c')$ bo'ladi. Hisoblashni birinchi usulda amalga oshiraylik.

K sistemadagi $\vec c$ vektor koordinatalarini topamiz. Buning uchun teskari almashtirish qoidasidan foydalanamiz: $c_k=\alpha_{kl}^T c_l'$. Almashish qoidasini matritsa ko'rinishda yozish qulaydir:

$$c_k=\alpha_{kl}^T c_l' \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\ & \alpha^T & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'\\ c_2'\\ c_3'\end{pmatrix}.$$

α matritsa oldingi misolda hisoblangan, shundan foydalansak

$$\vec c=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ 1+\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Demak, skalyar ko'paytma $(\vec{a},\vec{c}) = 0\cdot(-2)+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+2\cdot 1 = 4$ bo'ladi. ◄

Tayanch so'zlar va iboralar

Bazis, ortonormal bazis, Eynshteyn belgisi, Kroneker belgisi, ortlar, koordinatalar sistemasini almashtirish.

Takrorlash uchun savollar

1. Bazis nima?
2. Qanday bazisga ortonormal bazis deyiladi?
3. Eynshteyn belgisini nima uchun ishlatamiz?
4. Kroneker belgisi qanday bo'ladi?
5. Birinchi tur va ikkinchi tur almashtirishlarning farqi nimada?

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Dekart koordinatalar sistemasida $\vec{a} = \{1,1,\sqrt{3}\}$ vektor berilgan. Koordinatalar sistemasi Ox o'qini 30^0 ga burishda hosil bo'lgan yangi sistemada berilgan vektorning koordinatalarini toping.

2. Biror K Dekart koordinatalar sistemasida $\vec{a} = \{1,-1,1\}$ vektor berilgan. K' sistemada (K' K sistemani Ox o'qi atrofida 30^0 burchakka burishdan hosil bo'lgan) $\vec{c}' = \{-1,2,2\}$ vektor koordinatalari ma'lum bo'lsa bu vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

8. Tenzorlar algebrasi

- ***Tenzor tuchunchasiga olib keladigan fizik masala.***
- ***Tenzor tushunchasi.***
- ***Tenzorlar ustida amallar.***

8.1. Tenzor tuchunchasiga olib keladigan fizik masala

Shunday fizik jarayonlar borki ulardagi tekshirilayotgan obyektning xarakteristikalari tenzor tushunchasiga olib keladi. Ravshanki obyektning xarakteristikasi invariantlik xususiyatga ega bo'lishi kerak, ya'ni koordinatalar sistemasini tanlashga bog'liq bo'lmasligi lozim. Fizikadagi skalyar miqdorlar turkumiga kiruvchi massa, zaryad va h.k. lar invariantligi o'z-o'zidan ravshan. Tezlik, tezlanish kabi miqdorlar vektor kattaliklar bo'lib, koordinata sistemasiga nisbatan uchlik son orqali beriladi va bu sonlar koordinatalarni burishda (7.24), (7.25) qonuniyatlar bo‘yicha o‘zgaradi. Bu miqdorlarlarning invariantligi shu bilan ifodalanadiki vektor koordinatalari o‘zgargani bilan vektor yo‘nalishga ega bo‘lgan kesma, ozgarmas bo‘ladi.

Fizikada skalyar va vektor miqdorlardan tashqari murakkabroq bo‘lgan obyektlar ham uchraydi. Misol sifatida aylanma harakat qilayotgan jismning kinetik energiyasini hisoblashni ko‘raylik.

Jism inersiya markaziga mahkamlangan bo‘lib, $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan aylanayotgan bo‘lsin. Agar jismning zichligi $\rho(\vec{r}) = \rho(x,y,z)$ bo‘lsa,

$$E = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]^2 dv \tag{8.1}$$

hajmiy integral kinetik energiyaga teng bo‘ladi. Integral ostidagi vektor ko‘paytmani yoyib Eynshteyn simvolikasidan foydalansak,

$$\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]^2 = \vec{\omega}^2\vec{r}^2 - (\vec{\omega},\vec{r})^2 = \omega_i\omega_i r^2 - \omega_i x_i \omega_k x_k,$$

bo‘ladi. δ simvolni ishlatib

$$\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]^2 = \omega_i\omega_k(\delta_{ik}r^2 - x_i x_k), \tag{8.2}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. (8.1) va (8.2) ifodalarni kinetik energiya ifodasiga qo‘ysak,

$$E = \frac{1}{2}\left[\int_V \rho(\vec{r})\left(\delta_{ik}r^2 - x_i x_k\right)dv\right]\omega_i\omega_k, \tag{8.3}$$

bo‘ladi. Quyidagicha belgilash kiritib

$$I_{ik} = \int_V \rho(\vec{r})\left(\delta_{ik}r^2 - x_i x_k\right)dv, \tag{8.4}$$

(8.3) ni

$$E = \frac{1}{2}I_{ik}\omega_i\omega_k, \tag{8.6}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Shunday qilib, kinetik energiya burchak tezlikdan tashqari jismning inertlik xususiyatini aniqlovchi

$$(I)_{ik} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

matritsa ko‘rinishdagi miqdorlarga ham bog‘liq bo‘ladi. I_{ik} miqdorlarning ma’nosini anglash uchun jism radiusi R ga teng bo‘lgan shardan iborat va $\rho(\vec{r}) = const$ bo‘lganda matritsa

$$(I)_{ik}=\frac{2}{5}MR^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{8.8}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $M=\frac{4}{3}\rho\pi R^3$ shar massasi. (8.8) ko'ra (8.6) ni

$$E=\frac{2}{5}MR^2\omega^2,$$

ko'rinishda yoziladi, $I=\frac{2}{5}MR^2$ ga sharning inersiya momenti deyiladi, va u sferik ko'rinishdagi bir jinsli sharning aylanma harakatdagi inersion xarakteristikasini ifodalaydi.

Shuni qayd qilish kerakki, kinetik energiyaning ifodasi uning invariantligini ko'rsatadi, chunki bu ifodani tashkil etuvchilari skalyar miqdorlardir.

Umumiy holda I_{ik} ning ma'nosini anglash uchun yangi sistemaga o'tilganda bu miqdorlar qanday o'zgarishini kuzatish kerak. (x',y',z') sistema (x,y,z) ni burishdan hosil qilingan bo'lsin:

$$I'_{ik}=\int\limits_V \rho(\vec{r}')\left(\delta_{ik}r'^2-x'_ix'_k\right)dv, \tag{8.9}$$

Eski va yangi sistemalar (7.23) qonuniyat bo'yicha bog'langan:

$$x'_i=\alpha_{im}x_m. \tag{8.10}$$

$\delta_{ik}=\alpha_{im}\alpha_{km}=\alpha_{im}\alpha_{kn}\delta_{mn}$ bo'lgani uchun (8.10) almashtirishning Yakobiani $J=\det(\alpha_{mn})=1$ bo'lgani uchun

$$I'_{ik}=\alpha_{im}\alpha_{kn}\int\limits_V \rho(\vec{r})\left(\delta_{mn}r^2-x_mx_n\right)dv, \tag{8.11}$$

(8.11) ni (8.4) bilan taqqoslash natijasida

$$I'_{ik}=\alpha_{im}\alpha_{kn}I_{mn}, \tag{8.12}$$

munosabatga kelamiz. (8.12) dan

$$I'_{ik}\omega'_i\omega'_k=\alpha_{im}\alpha_{kn}I_{mn}\omega'_i\omega'_k=I_{mn}\left(\alpha_{im}\omega'_i\right)\left(\alpha_{kn}\omega'_k\right)$$

(7.23) ga ko'ra bundan

$$I'_{ik}\omega'_i\omega'_k=I_{mn}\omega_m\omega_n \tag{8.13}$$

(8.13) dan koordinatalar sistemasini burishda energiyaning o'zgarmasligi, ya'ni invariantligini ifodalaydi. Shu bilan birga (8.12) ifoda jism inersiyasini aniqlovchi I_{ik} miqdorlarning koordinatalar sistemasini burishda qanday o'zgarishini ko'rsatadi.

I_{ik} miqdorlar jismning aylanma harakatida uning enersiyasini ko'rsatuvchi kattalikdir. I_{ik} miqdorlarning majmuasi **inersiya tenzori** deb ataluvchi miqdorning koodinatalaridan iboratdir.

8.2. Tenzor tushunchasi

Oldingi mavzuda koordinatalar sistemasini burish jarayonida vektorning koordinatalarini qanday almashish qoidalari bilan tanishdik. Matematika, mexanika va fizikada shunday murakkab obyektlar borki ularning koordinatalari bazis almashish jarayonida maxsus qoida bilan o'zgaradi. Masalan, ikki vektor koordinatalarining ko'paytmasidan hosil bo'lgan 9 ta A_iB_j miqdordan iborat bo'lgan obyektni qaraylik. Vektor koordinatalarini almashish qoidasi (7.24) dan bu 9 miqdor ushbu

$$A_i'B_j' = \alpha_{in}\alpha_{jm}A_nB_m$$

qoida bo'yicha almashadi. $A_iB_j = T_{ij}$ belgilash kiritish natijasida $T_{ij}' = \alpha_{in}\alpha_{jm}T_{nm}$ tenglikka kelamiz. Uch o'lchovli fazoda koordinata sistemasini burish jarayonida 9 ta miqdorning bunday almashish qoidasiga **2-rang tenzor** deyiladi. Xuddi shunengdek, 27 ta miqdordan iborat to'plam $T_{ijk} = A_iB_jC_k$ ni qarash mumkin va ularning almashish qoidasi

$$T_{ijk}' = \alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}T_{nml}$$

ko'rinishda bo'ladi. T_{ijk} miqdorlar uch o'lchovli fazoda *uchinchi rang tenzorlar* deyiladi. Bu yerda tenzor ta'rifni biz tushunish qulay bo'lishi uchun vektorlar orqali keltirdik. Tenzorlarning vektorga bog'lanmagan umumiy ta'rifi quyidagicha bo'ladi:

Ta'rif. Agar uch o'lchovli fazoda 3^R miqdorlar ortogonal koordinatalar sistemasini burishda eski va yangi bazislarda

$$T_{i_1i_2...i_R}' = \alpha_{i_1k_1}\alpha_{i_2k_2}\cdots\alpha_{i_Rk_R}T_{k_1k_2\cdots k_R} \qquad (8.14)$$

qoida bo'yicha bog'langan bo'lsa bunday miqdorlarga *R- rang tenzorlar* deyiladi.

Ta'rifga ko'ra nolinchi rang tenzor skalyar bo'lib, u koordinatalar sistemasini almashihsida o'zgarmaydi. Birinchi rang tenzor vektordan iborat bo'lib, uning koordinatalari (7.23) yo'ki (7.24) qonuniyat bilan o'zgaradi:

$$A_i' = \alpha_{ij}A_j \qquad \text{yo'ki} \qquad A_k = \alpha_{ki}'A_i' \qquad (8.15)$$

2 – rang tenzor uch o'lchovli fazoda 3^2 koordinatalari mavjud bo'ladi. Ularning to'g'ri va teskari almashish qonunlari quyidagicha bo'ladi:

$$B'_{ij} = \alpha_{in}\alpha_{jm}B_{nm}, \qquad B_{ij} = \alpha^T_{in}\alpha^T_{jm}B'_{nm} \tag{8.16}$$

3 – rang tenzorning almashish qonunida uchta burish matritsasi ishtirok etadi.

(8.16) ifodalarni matritsa ko‘rinishda ifodalash hisoblashlarda qulaylik tug‘diradi.

$$B'_{ij} = \alpha_{in}\alpha_{jm}B_{nm} = \alpha_{in}B_{nm}\alpha_{jm} = \alpha_{in}B_{nm}\alpha^T_{mj} = \left(\alpha\cdot B\cdot\alpha^T\right)_{ij} \Rightarrow B' = \alpha\cdot B\cdot\alpha^T \tag{8.17}$$

Xuddi shuningdek, (8.17) dan teskari almashish qonunini keltirib chiqarish mumkin

$$B = \alpha^T\cdot B'\cdot\alpha \tag{8.18}$$

1-*misol.* (7.6) formula yordamida aniqlangan Kroneker belgisining tenzorligini ko‘rsataylik.

▷ Kroneker belgisini Dekart koordinatalardagi ortlarning skalyar ko‘paytmasi shaklida ifodalash mumkin: $\delta_{mk} = (\vec{e}_m, \vec{e}_k)$, $\delta'_{mk} = (\vec{e}\,'_m, \vec{e}\,'_k)$. Ortlarning almashish qonunidan

$$\delta'_{mk} = (\vec{e}\,'_m, \vec{e}\,'_k) = \alpha_{mn}\alpha_{kl}(\vec{e}_n, \vec{e}_l) = \alpha_{mn}\alpha_{kl}\delta_{nl}.$$

Demak, Kroneker belgisi ikkinchi rang tenzor ekan. Hisoblashni davom ettirsak

$$\delta'_{mk} = \alpha_{mn}\alpha_{kn} = \delta_{mk}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Kroneker belgisi ikkinchi rang tenzor bo‘lishidan tashqari o‘z ko‘rinishini ham o‘zgartirmas ekan. Bunday tenzorlarga **invariant** tenzorlar deyiladi. ◀

2-*misol.* Boshlang‘ich koordinatalar sistemasida 2 – rang B tenzorning koordinatalari berilgan bo‘lsin:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{8.19}$$

z o‘qi atrofida Dekart koordinatalar sistemasini 135^0 ga burish natijasida hosil bo‘lgan sistemada tenzor koordinatalarini toping.

▷(8.17) dan foydalansak

$$B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -2\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

8.3. Tenzorlar ustida amallar

8.3.1. Tenzorlarni qo'shish. Faqat bir xil rangli tenzorlarni qo'shish mumkin va qo'shishda mos koordinatalari qo'shiladi. Tenzorlarni qo'shish natijasida uning rangi o'zgarmaydi.

Misol. Masalan, uchinchi rang tenzor quyidagicha qo'shiladi:

$$C_{ijk} = A_{ijk} + B_{ijk}$$

▷ C ning uchunchi rang tenzor ekanligini ko'rsatamiz. A va B uchinchi rang tenzor bo'lgani uchun ularning har birining elementlar soni $3^3=27$ ga teng. A va B tenzorlarning mos elementlari qo'shilgandan so'ng yifindidda yana 27 ta element hosil bo'ladi. Endi C tenzor koordinatalarining almashish qonunini ko'raylik.

$$\alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}(A_{nml} + B_{nml}) = \alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}C_{nml}.$$

Shunday qilib,

$$C'_{nml} = \alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}C_{nml}.$$

Bu munosabat C ning uchunchi rang tenzorligini ko'rsatadi. Ravshanki, ixtiyoriy rangli tenzorlar uchun ham bu qoidaning o'rinliligini ko'rsatish qiyin emas. ◀

8.3.2. Tenzorlarni ko'paytirish. A tenzor R_1 rangli bo'lib B tenzor R_2 rangli bo'lsin. Bu tenzorlarni ko'paytirish natijasida R_1+R_2 rangli C tenzor hosil bo'ladi.

Misol. A 1 - rang, B 2 – rang tenzorlar bo'lsin. Bu tenzorlarni ko'paytirish natijasida 3 – rang tenzor hosil bo'ladi.

$$A_i \cdot B_{jk} = C_{ijk}$$

▷ Haqiqatan ham C ning elementlar soni 27 ga ya'ni 3 – rang tenzor elementlar soniga teng bo'ladi. Endi koordinatalar sistemasini burishdagi almashish qonunini tekshiramiz.

$$C'_{ijk} = A'_i \cdot B'_{jk} = \alpha_{in}A_n \cdot \alpha_{jm}\alpha_{kl}B_{kl} = \alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}A_nB_{kl} = \alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}C_{nml}.$$

Bundan C ning tenzorligi kelib chiqadi. ◀

8.3.3. Tenzorni yig'ishtirish. A R – rang tenzor bo'lsin. A tenzor koordinatalarini ikki indeksi bo'yicha qo'shishga tenzorni yig'ishtirish deyiladi. R – rang tenzorni yig'ishtirish natijasida R-2 nargli tenzor hosil bo'ladi. Tenzorni yig'ishtirish amali tenzorni Kroneker simvoliga ko'paytirish va so'ng ikki indeks bo'yicha qo'shish bilan bir xil bo'lgani uchun tenzorni yig'ishtirish amalini tenzorni Kroneker belgisiga ko'paytirishdan hosil qilsa bo'ladi.

Misol. A uchinchi rang tenzor bo'lsin. Bu tenzorni oxirgi ikki indeksi bo'yicha yig'ishtiraylik, yani A_{ijj}. Ikkinchi tomondan $A_{ijk}\delta_{jk} = A_{ijj}$

bo'ladi. Bu yerda j yig'ish indeksi i esa erkin indeks, shuning uchun $A_{ijj} = B_i$ bo'ladi. Ya'ni uchinchi rang tenzorni yig'ishtirish natijasida 1 – rang tenzor hosil bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$A'_{ijj} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{jk}A_{mnk} = \alpha_{im}\delta_{nk}A_{mnk} = \alpha_{im}A_{mkk} = \alpha_{im}B_m .$$

Misol. C 4 – rang tenzorni oxirgi ikki indeksi bo'yicha yig'ishni ko'raylik. Natijaviy tenzorni ikkinchi rangligini isbotlaylik.

$$\triangleright\ C'_{ijkk} = D'_{ij} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kl}\alpha_{kh}C_{mnlh} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\delta_{lh}C_{mnlh} = \alpha_{im}\alpha_{jn}C_{mnll} = \alpha_{im}\alpha_{jn}D_{mn} . \blacktriangleleft$$

Tenzorni yig'ishtirish amalini qo'llash uchun tenzor rangi 2 va undan yuqori bo'lishi kerak. 2 – rang tenzorni yig'ishtirish amaliga **tenzorning izi** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$Sp(A_{ij}) = Tr(A_{ij}) = A_{ii} \tag{8.20}$$

Koordinata sistemasini burishga nisbatan tenzorning izi invariantdir. Haqiqatan ham

$$Sp(A'_{ij}) = A'_{ii} = \alpha_{ij}\alpha_{ik}A_{jk} = \delta_{jk}A_{jk} = A_{kk} = Sp(A_{ij}) \Rightarrow Sp(A'_{ij}) = Sp(A_{ij})$$

Tayanch iboralar

Tenzor, tenzorlarni ko'shish, tenzorlarni ko'paytirish, tenzorlarni yig'ishtirish, tenzor izi, tenzor rangi.

Takrorlash uchun savollar

1. Tenzor nima?
2. Tenzor rangi deb nimaga aytiladi?
3. Ikki tenzorni qachon qo'shish mumkin?
4. Kroneker belgisi nima?
5. Tenzorning izi deb nimaga aytiladi?

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Dekart koordinatalar sistemasida $T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenzor berilgan. Koordinatalar sistemasi Ox o'qini 30^0 ga burishda hosil bo'lgan yangi sistemadagi berilgan tenzorning koordinatalarini toping.

2. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ vektorlar bo'lsa, $\delta_{ij}A_jB_nC_n$ ko'paytmaning vektorligini isbotlang.

3. Vektor a_i va tenzor b_{ij} berilgan. $a_i \cdot b_{jk}$ miqdorlarning uchinchi rang tenzorligini isbotlang.

4. Ikki o'lchovli fazoda $\vec{A}=\{1,2\}$; $\vec{B}=\{3;-1\}$ vektorlar va $C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ikkinchi rang tenzorlar berilgan bo'lsa, quyidagi miqdorlarning o'lchami va koordinatalarini aniqlang.

a) c_{ii} b) $a_i c_{ij}$ c) $b_i d_{ji}$ d) $b_i d_{ij}$ e) $c_{ij} d_{jk}$ f) $c_{ij} d_{ij}$

9. Simmetrik va antisimmetrik tenzorlar

- ***Simmetrik va antisimmetrik tenzorlar.***
- ***Tenzorning xos va xos vektorlari.***
- ***Tenzorning xarakteristik sirti.***
- ***Ikkinchi rang tenzorning invariantlari.***

9.1. Simmetrik va antisimmetrik tenzorlar

Ikkinchi rang T_{ij} tenzorni qaraylik. Agar indekslar o'rnini almashtirganda koordinatalari o'zgarmasa, bunday tenzorlarga **simmetrik tenzorlar** deyiladi. Indekslar o'nini almashtirilganda tenzor koordinatalarining ishorasi teckariga almashsa, bunday tenzorga **antisimmetrik tenzor** deyiladi:

$$T_{ij}=T_{ji} \quad \Rightarrow \quad T_{ij} - \text{ simmetrik tenzor,}$$

$$T_{ij}=-T_{ji} \quad \Rightarrow \quad T_{ij} - \text{ antisimmetrik tenzor.}$$

Yuqori tartibli tenzorlarda simmetriklik va antisimmetrik tushunchalari juft indekslarga nisbatan qaraladi. Masalan,

$$F_{ijkn}=F_{jikn} \quad \text{va} \quad F_{ijkn}=-F_{kjin}$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, 4 – rang F tenzor birinchi juft indeks bo'yicha simmetrik bo'lib, 1 – va 3 – indekslari bo'yicha antisimmetrik deyiladi.

Tenzorlarning simmetriklik xossasi tenzorning o'zaro bog'liq bo'lmagan elementlar sonining kamayishiga olib keladi. 2 – rang tenzorni 3×3 matritsa bilan qiyoslash mumkin. Simmetrik tenzorda bosh dioganal va undan yuqorida joylashgan elementlar bilan to'la aniqlanadi. Bunday elementlar esa oltiga teng bo'ladi.

Ikkinchi rang antisimmetrik tenzor koordinatalari bosh dioganaldan yuqorida joylashgan va bu dioganaldan pastda joylashgan koordinatalari ishoralari bilan farq qiladi. Bosh dioganalda joylashgan elementlar nolga teng bo'ladi. Haqiqatan ham, A_{ij} antisimmetrik tenzor bo'lsin: A_{ij}=-A_{ji} . Bu tenglikda $i=j$ deb olsak, A_{jj}=-A_{jj} (bu tenglikda j bo'yicha yig'indi yo'q) bo'ladi, bundan $A_{jj}=0$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uch o'lchovli fazoda antisimmetrik tenzorning bog'liq bo'lmagan elementlari uchga teng bo'ladi.

Tenzorlarning simmetrik va antisimmetrik xossalari invariantligini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham, simmetrik T_{ij} tenzorni ko'raylik: ya'ni $T_{ij} = T_{ji}$. Dekart koordinatalar sistemasini biror burchakka burishdan hosil bo'lgan sistemada ham $T'_{ij} = T'_{ji}$ bo'lishini ko'rsatamiz:

$$T'_{ij} = \alpha_{in}\alpha_{jm}T_{nm} = \alpha_{in}\alpha_{jm}T_{mn} = \alpha_{jm}\alpha_{in}T_{mn} = T'_{ji}.$$

Antisimmetrik xossasi ham shunday isbotlanadi.

Teorema. Har qanday ikkinchi rang tenzorni simmetrik va antisimmetrik tenzorlar yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Isboti. Ikkinchi rang T_{ij} tenzor berilgan bo'lsin. Bu tenzorning ixtiyoriy elementi uchun

$$T_{ij} = \frac{T_{ij}}{2} + \frac{T_{ij}}{2} = \frac{T_{ij}}{2} + \frac{T_{ij}}{2} + \frac{T_{ji}}{2} - \frac{T_{ji}}{2} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} + \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2},$$

tenglikni yozish mumkin. $S_{ij} = (T_{ij} + T_{ji})/2$, $A_{ij} = (T_{ij} - T_{ji})/2$ belgilashlar kiritsak, berilgan tenzorni

$$T_{ij} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} + \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2} = S_{ij} + A_{ij},$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi. S_{ij} va A_{ij} tenzorlarning simmetrik va antisimmetrikligi quyidagilardan ko'rinadi.

$$S_{ij} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} = \frac{T_{ji} + T_{ij}}{2} = S_{ji},$$

$$A_{ij} = \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2} = -\frac{T_{ji} - T_{ij}}{2} = -A_{ji}.$$

1-*misol.* Biror Dekart koordinatalar sistemasida quyidagi tenzor berilgan bo'lsin.

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bu tenzorning simmetrik va antisimmetrik qismlarini va $Sp(S_{ij}A_{jk})$ ni topaylik.

▷ Simmetrik va antisimmetrik elementlarni topish formulasidan

$$S_{ij}=\frac{C_{ij}+C_{ji}}{2}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&3&2\\3&-1&1\\4&-1&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3&4\\3&-1&-1\\2&1&6\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&3&3\\3&-1&0\\3&0&6\end{pmatrix},$$

$$A_{ij}=\frac{C_{ij}-C_{ji}}{2}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&3&2\\3&-1&1\\4&-1&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3&4\\3&-1&-1\\2&1&6\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

$S_{ij}A_{jk}=D_{ik}$ belgilash kiritaylik. Bu belgilashni matritsa ko'rinishda ifodalasak $D=S\cdot A$ bo'ladi. Unda D tenzor elementlari

$$D_{ik}=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&-1&0\\3&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&4\\0&0&-4\\6&-6&-3\end{pmatrix}.$$

$Sp\left(S_{ij}A_{jk}\right)=S_{kj}A_{jk}=D_{kk}$ bo'lgani uchun, D tenzorning dioganal elementlar yig'indisi nolga teng. Shuning uchun $Sp\left(S_{ij}A_{jk}\right)=0$.◀

2-*misol.* Avvalgi misolda ikkilangan yig'ishtirish $S_{kj}A_{jk}$ ning nolga tenligini ko'rdik. Endi umumiy holni ko'ramiz. Ixtiyoriy simmetrik va antisimmetrik tenzorlarning ikkilangan yig'ishtirishi doim nolga tengligini ko'rsatamiz.

▷ $$S_{kj}A_{jk}=S_{jk}(-A_{kj})=-S_{jk}A_{kj}.$$

Bu tengliklarda k ham j ham yig'ishtirish indeksi bo'lgani uchun k ni j ga, j ni esa k ga almashtirsak,

$$S_{kj}A_{jk}=-S_{jk}A_{kj}=-S_{kj}A_{jk},$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan $S_{kj}A_{jk}=0$ kelib chiqadi.◀

9.2. Tenzorning xos va xos vektorlari

2 - rang tenzorni vektorga ko'paytirib yig'ishtirish natijasida vektor hosil bo'ladi: $T_{ij}A_j=B_i$. Agar $\vec{A}$ vektor $\vec{B}$ vektorga kollinear bo'lsa, ya'ni

$$T_{ij}A_j=\lambda A_i \tag{9.1}$$

bo'lsa, λ ga tenzorning **xos soni**, $\vec{A}$ vektorga tenzorning λ xos songa mos kelgan **xos vektori** deyiladi. (9.1) dan

$$T_{ij}A_j=\lambda A_i \Rightarrow T_{ij}A_j-\lambda\delta_{ij}A_j=0, \Rightarrow (T_{ij}-\lambda\delta_{ij})A_j=0.$$

Oxirgi tenglama $\vec{A}$ vektor elementlariga nisbatan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasidir. Bu sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun, determinant nolga teng bo'lishi kerak:

$$\det\left(T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right)=0. \tag{9.2}$$

Bu tenglamaga tenzorning **xarakteristik tenglamasi** deyiladi. Uch o'lchovli fazoda xarakteristik tenglama uchinchi tartibli bo'ladi va uning uch ildizi $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\lambda^{(3)}$ bo'lib har bir xos songa mos $\vec{A}^{(1)},\vec{A}^{(2)},\vec{A}^{(3)}$ xos vektorlar topiladi.

Teorema. Simmetrik tenzorning xos sonlari haqiqiy bo'lib, ularga mos xos vektorlari ortogonal bo'ladi.

Isboti. T_{ij} simmetrik bo'lib, $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\lambda^{(3)}$ lar uning xos sonlari $\vec{A}^{(1)},\vec{A}^{(2)},\vec{A}^{(3)}$ lar ularga mos kelgan xos vektorlari bo'lsin. Xos sonlarni kompleks deb faraz qilaylik. U holda xos vektorlar ham komleks bo'ladi. U holda (9.1) bilan birga unga kompleks qo'shma tenglamani ham qaraymiz:

$$\begin{cases} T_{ij}A_j = \lambda A_i \\ T_{ij}A_j^* = \lambda^* A_j^* \end{cases}.$$

Birinchi tenglamani A_i^* ga, ikkinchisini A_i ga ko'paytirib so'ng birinchisidan ikkinchisini ayirsak

$$0 = \left(\lambda - \lambda^*\right)\left|A_i\right|^2$$

kelib chiqadi (chap tomonning nolga tenligi $T_{ij}A_j^*A_i = T_{ji}A_j^*A_i \underset{i \leftrightarrow j}{=} T_{ij}A_i^*A_j$ tenglikka ko'ra hosil bo'ladi). Bundan $\lambda = \lambda^*$ bo'lishi kelib chiqadi va xos sonlarning haqiqiy ekanligi ko'rinadi.

$\lambda^{(1)}$ va $\lambda^{(2)}$ ga mos kelgan $\vec{A}^{(1)},\vec{A}^{(2)}$ vektorlarni ko'raylik. $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$ bo'lsin. Bu miqdorlar quyidagi tenglamalarni qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} T_{ij}A_j^{(1)} = \lambda^{(1)}A_i^{(1)} \\ T_{ij}A_j^{(2)} = \lambda^{(2)}A_i^{(2)} \end{cases}$$

Sistemaning birinchisini $\vec{A}^{(2)}$ ga, ikkinchisini $\vec{A}^{(1)}$ ga ko'paytirib so'ng ayirsak

$$0 = (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})\left(\vec{A}^{(1)},\vec{A}^{(2)}\right),$$

bundan $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$ ga asosan $\left(\vec{A}^{(1)},\vec{A}^{(2)}\right) = 0$, kelib chiqadi, ya'ni xos vektorlar ortogonal bo'ladi.

Agar ikki yoki uchchala xos sonlar o'zaro teng bo'lsa, ularga mos vektorlarni bir-biriga ortogonal sifatida tanlab olish mumkin.

Ortogonal xos vektorlar asosida qurilgan sistemada tenzor sodda ko'rinishda, uning matritsasi dioganal matritsadan iborat bo'lib, dioganal elementlari xos sonlardan iborat bo'ladi. Yana shu narsani nazarda tutish kerakki, xos vektorlar o'ng sistemani tashkil qilishi kerak. Bu holda tenzorning xos sistemasiga o'tish jarayonini eski sistemani burish yordamida hosil qilish mumkin bo'ladi.

Misol. Quyidagi tenzorning xos son va xos vektorlarini toping.

$$M_{ij}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 10 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

▷ $\vec{A}=\{a,b,c\}$ M_{ij} tenzorning λ xos soniga mos kelgan xos vektori bo'lsin. Qulaylik uchun xos vektorni aniqlovchi (10.1) tenlamani matritsa ko'rinishda yozamiz.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 10 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 10-\lambda & 3\\ 0 & 3 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (9.3)$$

Xos sonlar xarakteristik tenglamadan topiladi:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 10-\lambda & 3\\ 0 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \Rightarrow\ (1-\lambda)^2(10-\lambda)-10(1-\lambda)=0.$$

Xarakteristik tenglamaning yechimlari $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ va $\lambda_3=11$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Topilgan xarakteristik sonlarni ketma-ket (10.3) ga qo'yib tenzorning xos vektorlarini topamiz. $\lambda_1=0$ uchun

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 10 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0,\\ 3b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-b,\\ c=-3b\end{cases}$$

Shunday qilib, $\lambda_1=0$ ga mos kelgan xos vektor $\vec{A}_1=b\{-1,1,-3\}$ ga teng bo'ladi. Xuddi shuningdek, qolgan xos vektorlarni ham topsa bo'ladi: $\vec{A}_2=c\{-3,0,1\}$ va $\vec{A}_3=a\{1,10,3\}$.

Topilgan xos vektorlarning ortogonalligini tekshirish qiyin emas. Tenzorning bosh o'qlarini aniqlaymiz:

$$\vec{e}_1=\frac{\vec{A}_1}{|\vec{A}_1|}=\frac{1}{\sqrt{11}}\{-1,1,-3\},\ \vec{e}_2=\frac{\vec{A}_2}{|\vec{A}_2|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\{-3,0,1\},\ \vec{e}_3=\frac{\vec{A}_3}{|\vec{A}_3|}=\pm\frac{1}{\sqrt{110}}\{1,10,3\}.$$

Bu yerda biz $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ ni topishda b va c ning ishoralarini musbat qilib oldik, $\vec{e}_3$ dagi a ning ishorasini noaniq qilib olindi. Uning ishorasini $\vec{e}_i$ vektorlar o'ng sistemani hosil qilishdan topiladi, ya'ni $\vec{e}_3=[\vec{e}_1,\vec{e}_2]$ tenglikdan tanlanadi. Vektor ko'paytmadan

$$[\vec{e}_1,\vec{e}_2]=\frac{1}{\sqrt{110}}\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ -1 & 1 & -3\\ -3 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{110}}(\vec{e}_1+10\vec{e}_2+3\vec{e}_3),$$

$\vec{e}_3$ dagi a ning ishorasini «+» ishora bilan olish kerakligi kelib chiqadi.◀

9.3. Tenzorning xarakteristik sirti.

Simmetrik tenzorni geometrik tasvirlash uchun **tenzorning xarakteristik sirti** tushunchasi kiritiladi. Bu sirt ikkinchi tartibli sirt bo'lib, uning tenglamasi

$$T_{ij}x_ix_j = 1 \tag{9.4}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Tenzorning bosh o'qlari tenzor xarakteristik tenglamasining bosh o'qlaridan iborat bo'ladi. Agar tenzorning xos sonlari teng bo'lsa, ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) bunday tenzorga **sharli tenzor** deyiladi. Sharli tenzorning xarakteristik sirti sferadan iborat bo'ladi. Agar $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ bo'lsa, bunday tenzorga **simmetrik tenzor** deyiladi va uning xarakteristik sirti aylanma sirtdan iborat bo'ladi. Agar $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ bo'lsa, bunday tenzorga **assimmetrik tenzor** deyiladi.

Agar tenzorning barcha xos sonlari musbat bo'lsa, tenzor musbat aniqlangan deyiladi. Agar barcha xos sonlari manfiy bo'lsa, tenzor manfiy aniqlangan deyiladi. Agar tenzorning ba'zi xos sonlari musbat ba'zilari manfiy bo'lsa, bunday tenzorga ishorasi aniqlanmagan tenzor deyiladi. Bunday tenzorning xarakteristik sirti giperboloiddan iborat bo'ladi.

Tenzorning bosh o'qlari bo'yicha olingan X'_1, X'_2, X'_3 sistemada tenzorning xarakteristik tenglamasi

$$\lambda_1 X_1'^2 + \lambda_2 X_2'^2 + \lambda_3 X_3'^2 = 1 \Rightarrow \frac{X_1'^2}{1/\lambda_1} + \frac{X_2'^2}{1/\lambda_2} + \frac{X_3'^2}{1/\lambda_3} = 1$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol. Quyida M_{ij} tenzor uchun tenzorli sirtni va bosh o'qlari bo'yicha olingan tenzor sirtlarni topishni ko'raylik.

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

▷ (10.4) ga ko'ra tenzor sirt $x^2 + 2xy + 10y^2 + 6yz + z^2 = 1$ ko'rinishda bo'ladi. Tenzorning bosh o'qlari bo'yicha olingan sistemada esa

$$M'_{ij}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&11\end{pmatrix}\Rightarrow X_2'^2+11X_3'^2=1,$$

sodda ko'rinishga ega bo'lib, silindrik sirtdan iborat bo'ladi. ◄

9.4. Ikkinchi rang tenzorning invariantlari

7 – paragrafda vektor uzunligi Dekart koordinatalar sistemasini burishda o'zgarmasligini, ya'ni invariantligini keltirgan edik. 2 – rang tenzor uchun ham o'zining invariantlari mavjuddir. Bunday invariantlarni aniqlash uchun (10.2) xarakteristik tenglmani kengaytirib yozaylik:

$$\lambda^3-\lambda^2(T_{11}+T_{22}+T_{33})+\lambda\left(\begin{vmatrix}T_{22}&T_{23}\\T_{32}&T_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T_{11}&T_{13}\\T_{31}&T_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T_{11}&T_{12}\\T_{21}&T_{22}\end{vmatrix}\right)-\begin{vmatrix}T_{11}&T_{12}&T_{13}\\T_{21}&T_{22}&T_{23}\\T_{31}&T_{32}&T_{33}\end{vmatrix}=0.$$

Tenzorni har xil koordinatalar sistemasida yozish mumkin. Tenzorning xos sonlari (xarakteristik tenglama ildizlari) koordinatalar sistemasiga bog'liq emas, ya'ni skalyar miqdorlardir. Bu esa xarakteristik tenglamaning koeffitsiyentlari koordinatalar sistemasini burishda o'zgarmasligi, ya'ni invariantligini bildiradi. Bu invariantlar quyidagichadir:

$$I_1=T_{11}+T_{22}+T_{33}=Sp(T_{ij}),$$

$$I_2=\begin{vmatrix}T_{22}&T_{23}\\T_{32}&T_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T_{11}&T_{13}\\T_{31}&T_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T_{11}&T_{12}\\T_{21}&T_{22}\end{vmatrix},\quad I_3=\begin{vmatrix}T_{11}&T_{12}&T_{13}\\T_{21}&T_{22}&T_{23}\\T_{31}&T_{32}&T_{33}\end{vmatrix}. \tag{9.5}$$

Invariantlarni tenzorning xos sonlari orqali ifodalash mumkin:

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1,\ I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Bu invariantlardan foydalanib yangi invariantlarni qurish mumkin:

$$I_1^2-2I_2=T_{11}^2+T_{22}^2+T_{33}^2+2T_{12}T_{21}+2T_{13}T_{31}+2T_{23}T_{32}=T_{ij}T_{ji}.$$

Tayanch iboralar

Simmetrik tenzor, antisimmetrik tenzor, ikkinchi rang tenzorning xos soni, ikkinchi rang tenzorning xos vektori, xarakteristik sirt, tenzor invariantlari.

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday tenzor simmetrik tenzor deyiladi?
2. Antisimmetrik tenzor qanday tenzor?

3. Tenzorning xos soni qanday topiladi?
4. Qanday vektorga tenzorning xos vektori deb aytiladi?
5. Qanday sirtga tenzorning xarakteristik sirti deb aytiladi?
6. Tenzorning invariantlari nima?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Tenzorni simmetrik va antisimmetrik qismlarga ajrating.

2. $T=\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ tenzorning a) xos sonlarini toping, b) xos vektorlarini toping, c) topilgan xos vektorlarining ortogonalligini tekshiring, d) bosh o'qlarga mos kelgan ortlarni aniqlang, e) bosh o'qlarga mos kelgan tenzorning burish matritsasini keltiring, f) bosh o'qlardagi tenzorni toping, g) xarakteristik sirtni quring.

3. $F=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ tenzorning a) xos sonlarini toping, b) xos vektorlarini toping, c) topilgan xos vektorlarining ortogonalligini tekshiring, d) bosh o'qlarga mos kelgan ortlarni aniqlang, e) bosh o'qlarga mos kelgan tenzorning burish matritsasini keltiring, f) bosh o'qlardagi tenzorni toping.

10. Levi-Chivita simvoli. Inversiya

- ***Levi-Chivita simvoli.***
- ***Vektor koordinatalarining inversiyada almashishi.***
- ***Tenzor miqdorlarning inversida almashishi.***

10.1. Levi-Chivita simvoli

Quyidagi qonuniyat bo'yicha o'zgaradigan miqdorga Levi-Chivita simvoli deyiladi:

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases} 1, & \text{agar } \{i,j,k\} \text{ o'rin almashtirishlarsoni juft bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } \{i,j,k\} \text{ o'rin almashtirishlarsoni toq bo'lsa,} \\ 0, & \text{indekslar ichida bir-biriga tenglari uchrasa.} \end{cases} \qquad (10.1)$$

Masalan, $\{1,3,2\}$ ifodani $\{1,2,3\}$ ko'rinishga keltirish uchun 3 va 2 ni o'rinlarini bir marta almashtirish kifoya, ya'ni toq shuning uchun $\varepsilon_{132}=-1$ bo'ladi. ε_{231} ning qiymati esa 1 ga teng, chunki

$\{2,3,1\} \Rightarrow \{1,3,2\} \Rightarrow \{1,2,3\}$, almashtirishlar soni 2 ga teng. Uch o‘lchovli fazoda Levi-Chivita simvolining 27 ta elementi bo‘lib, shulardan uchtasi 1 ga teng:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$

boshqa uchtasi

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$$

-1 ga teng, qolgan barchasi nolga teng bo‘ladi.

Indekslarni siklik almashtirilganda Levi-Chivita simvolining qiymati o‘zgarmaydi:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}.$$

Levi-Chivita simvoli yordamida ko‘p amallarni qisqacha yozish imkoniyati paydo bo‘ladi. Masalan, o‘ng Dekart koordinatalar sistemasida bazis vektorlari uchun

$$[\vec{e}_k, \vec{e}_l] = \varepsilon_{klm} \vec{e}_m \qquad (10.2)$$

tenglikning to‘g‘riligini tekshirish qiyin emas. Xususan,

$$[\vec{e}_3, \vec{e}_2] = \varepsilon_{32m} \vec{e}_m = \varepsilon_{321} \vec{e}_1 = -\vec{e}_1.$$

(10.2) ikki tomonini ort $\vec{e}_i$ ga skalyar ko‘paytirsak

$$([\vec{e}_k, \vec{e}_l], \vec{e}_i) = \varepsilon_{klm} (\vec{e}_m, \vec{e}_i) = \varepsilon_{klm} \delta_{mi} = \varepsilon_{kli}$$

Bundan Levi-Chivita simvolini uch o‘lchovli fazoda aralash ko‘paytma ko‘rinishda berilishi mumkinligi kelib chiqadi:

$$\varepsilon_{ijk} = ([\vec{e}_i, \vec{e}_j], \vec{e}_k). \qquad (10.3)$$

Levi-Chivita simvoli Kroneker belgisi orqali ham bo‘g‘langan

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}. \qquad (10.4)$$

Misol. Quyidagi tenglik isbot qilinsin.

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \qquad (10.5)$$

▷ O‘ng tomondagi determinantning matritsasini A bilan belgilaylik. Ya’ni $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det A$. $\varepsilon_{ijk} = \det B$ va $\varepsilon_{lmn} = \det C$ belgilashlar kiritaylik. Matritsani matritsaga ko‘paytirish qoidasidan

$$B \cdot C^T = \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{l1} & \delta_{m1} & \delta_{n1} \\ \delta_{l2} & \delta_{m2} & \delta_{n2} \\ \delta_{l3} & \delta_{m3} & \delta_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} = A,$$

ekanligi kelib chiqadi. Xaqiqatan ham, masalan, $\left(B\cdot C^T\right)_{11}$ element uchun

$$\left(B\cdot C^T\right)_{11}=\delta_{i1}\delta_{l1}+\delta_{i2}\delta_{l2}+\delta_{i3}\delta_{l3}=\delta_{im}\delta_{lm}=\delta_{il}$$

ekanligi kelib chiqadi. Qolgan elementlar uchun shu kabi tengliklar o'rinli bo'ladi. $\det C^T=\det C$ va $\det\left(B\cdot C^T\right)=\det B\cdot\det C^T$ tengliklardan (10.5) ning o'rinliligi kelib chiqadi. ◀

Misol. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}$ tenglikning o'rinliligi isbot qilinsin.

▷ Oldingi misol natijasidan foydalanamiz. l indeksni k indeks bilan almashtiramiz:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}=\begin{vmatrix}\delta_{ik} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jk} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kk} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}.$$

Determinantni yoyib $\delta_{kk}=3$ ekanligini inobatga olsak,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}=\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{ik}\delta_{km}\delta_{jn}+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kk}-$$

$$\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{kn}+\delta_{in}\delta_{jk}\delta_{km}-\delta_{in}\delta_{kk}\delta_{jm}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}. \blacktriangleleft$$

Misol. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kjn}$ ikkilangan yig'indini hisoblang.

▷ $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}$ tenlikdan foydalanamiz. Bu tenglikda indeks $m\to j$ ni almashtirsak,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kjn}=\delta_{ij}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jj}=\delta_{in}-3\delta_{in}=-2\delta_{in},$$

bo'ladi. Uchlangan yig'indi uchun esa $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{ijk}^2=6$ ekanligini ko'rish qiyin emas. ◀

Levi-Chivita tenzori **invariant** tenzor hisoblanadi:

$$\varepsilon'_{ijk}=\alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}\varepsilon_{nml}=\varepsilon_{ijk}.$$

Haqiqatan ham,

$$\varepsilon'_{ijk}=\alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}\varepsilon_{nml}=\alpha_{i1}\alpha_{j2}\alpha_{k3}+\alpha_{i3}\alpha_{j1}\alpha_{k2}+\alpha_{i2}\alpha_{j3}\alpha_{k1}-\alpha_{i2}\alpha_{j1}\alpha_{k3}-$$

$$-\alpha_{i3}\alpha_{j2}\alpha_{k1}-\alpha_{i1}\alpha_{j3}\alpha_{k2}=\begin{vmatrix}\alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3}\\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \alpha_{j3}\\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3}\end{vmatrix}=\left(\vec{e}'_i,\left[\vec{e}'_j,\vec{e}'_k\right]\right).$$

Bu tenglikdan, agar $\vec{e}'_i,\vec{e}'_j,\vec{e}'_k$ lar o'ng bazisni tashkil qilsa, $\varepsilon'_{123}=\left(\vec{e}'_1,\left[\vec{e}'_2,\vec{e}'_3\right]\right)=1$ bo'lishi kelib chiqadi. Aralash ko'paytmaning quyidagi xossalarini:

- Aralash ko'paytmada ikki vektor o'rni almashganda ishorasi o'zgaradi;

•Aralash ko'paytmaning ixtiyoriy ukki vektori mos kelsa u nolga teng bo'ladi;

inobatga olinsa $\left(\vec{e}'_i,\left[\vec{e}'_j,\vec{e}'_k\right]\right)=\varepsilon_{ijk}$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, Levi-Chivita simvoli invariant tenzor ekan.

10.2. Vektor koordinatalarining inversiyada almashishi

Inversiya jarayonida koordinata sistemasining ortlarining yo'nalishi teskarisiga almashadi:

$$\vec{e}'_i=-\vec{e}_i.$$

Inversiyada koordinatalarni almashtirish matritsasi

$$\alpha_0=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{10.6}$$

ko'rinishda bo'ladi. Inversiyada $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ o'ng sistema chap sistema bilan almashadi:

$$\left(\left[\vec{e}_1,\vec{e}_2\right],\vec{e}_3\right)=1,\ \Rightarrow\ \left(\left[\vec{e}'_1,\vec{e}'_2\right],\vec{e}'_3\right)=-1.$$

Bunday almashtirishning o'ziga xosligini quyidagi misolda izohlaymiz. Uchta $\vec{a}=\{1,2,1\}$, $\vec{b}=\{2,1,2\}$, va $\vec{c}=\{3,0,-3\}$ vektorlarni qaraylik. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ vektor ko'paytmani topaylik:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=3\vec{e}_1-3\vec{e}_3,$$

ya'ni $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\{3,0,-3\}$. Shuning uchun $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{c}$ bo'ladi. Koordinatalar sistemasini inversiyaga almashtiraylik:

$$\vec{a}'=\{-1,-2,-1\},\ \vec{b}'=\{-2,-1,-2\},\ \vec{c}'=\{-3,\,0,\,3\}.$$

$\left[\vec{a}',\vec{b}'\right]$ vektor ko'paytmani topaylik:

$$\left[\vec{a}',\vec{b}'\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3\\ -1 & -2 & -1\\ -2 & -1 & -2\end{vmatrix}=3\vec{e}'_1-3\vec{e}'_3,$$

ya'ni $\left[\vec{a}',\vec{b}'\right]=\{3,0,-3\}$ va $\left[\vec{a}',\vec{b}'\right]\neq\vec{c}'$. Boshlag'ich sistemada vektorlar teng bo'lyapti. Inversiyadan so'ng bu tenglik o'rinli bo'lmayapti.

Demak, bundan ko'rinadiki, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ va $\vec{c}$ vektorlar inversiyadan sȯ'ng o'zlarini har xil tutar ekanlar.

Ta'rif. Agar koordinatalar sistemasining inversiyasida vektor o'z yo'nalishini o'zgartirmasa (koordinatalari ishorasini o'zgartiradi), bunday vektorga **qutb vektor** deyiladi. Agar inversiyada vektor o'z yo'nalishini teskarisiga almashtirsa (koordinatalari o'zgarmasa), **aksial (psevdovektor)** deyiladi.

Bizning misolda $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar qutb vektorlar. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ aksial vektordir. Fizikada qutb vektorlarga siljish vektori $\vec{S}$, tezlik vektori $\vec{v}$, tezlanish vektori $\vec{a}$ va $\vec{F}$ kuch vektor va h.k.lar misol bola oladi. Ikki qutb vektorning vektor ko'paytmasi aksial vektor bo'lgani uchun impuls $\vec{l}=[\vec{r},m\vec{v}]$ va kuch $\vec{K}=\left[\vec{r},\vec{F}\right]$ momentlari aksil vektordan iborat bo'ladi.

10.3. Tenzor miqdorlarning inversida almashishi

Ortogonal almashtirish matritsasi uchun $\det\alpha=+1$ bo'lsa, birinchi tur almashtish deyilishi aytilgan edi. $\det\alpha=-1$ bo'ganda ikkinchi tur almashtirish deyilib, bunday almashtirishlar sistemani burish va inversiyalash jarayonida ro'y beradi.

Psevdovektor tushunchasi kabi **psevdotenzor** tushunchasi kiritiladi.

Ta'rif. Agar uch o'lchovli fazoda 3^R miqdorlar ortogonal koordinatalar sistemasini burishda eski va yangi bazislarda

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_R}=\det\alpha\cdot\alpha_{i_1k_1}\alpha_{i_2k_2}\cdots\alpha_{i_Rk_R}T_{k_1k_2\ldots k_R} \qquad (10.7)$$

qoida bo'yicha bog'langan bo'lsa, bunday miqdorlarga *R- rang psevdotenzorlar* deyiladi.

Psevdotenzorlarning almashish qonuni $\det\alpha=1$ bo'lganda oddiy tenzorlardan farq qilmaydi.

Psevdotenzor uchun amallar quyidagicha kengaytiriladi:

- Bir xil rangdagi psevdo tenzorlarni qo'shish mumkin, natijada shu rangdagi tenzor hosil bo'ladi.
- Tenzorni psevdotenzorga ko'paytirish mumkin. Natijaviy tenzor rangi ko'paytuvchi tenzorlar ranglari yig'indisiga teng bo'ladi.
- Psevdotenzorlarni juft indeksi bo'yicha yig'ishtirish mumkin. Natijaviy tenzor rangi berilgan psevdotenzor rangida 2 birlik kam bo'ladi.

1-*misol.* Dekart koordinatalar sistemasini z o'qi atrofida 90^0 ga burish va inversiyalash natijasidagi almashtirish matritsasini toping.

▷ Izlanayotgan matritsa inversiya $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ va *Oz* o'qi atrofida φ burchakka burish $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalarining ko'paytmasiga teng bo'ladi. Demak, $\varphi = 90^\circ$ uchun izlanayotgan matritsa

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. ◀

2-*misol.* Psevdovektor koordinatalarining inversiya natijasida o'zgarishini aniqlang.

▷ Inversiyada psevdo vektor koordinataladri $c_i' = \det\alpha_0 \cdot (\alpha_0)_{ij} c_j$ qonuniyat bo'yicha o'zgaradi. Bu yerda $(\alpha_0)_{ij} = -\delta_{ij}$ va $\det\alpha_0 = -1$ bo'lgani uchun $c_i' = \delta_{ij} c_j = c_i$. Demak, psevdovektor koordinatalari inversiyda o'zgarmas ekan (vektorlar koordinatalari inversiyada ishorasini o'zgartiradi). ◀

3-*misol.* a_i va b_i vektorlar va ε_{ijk} Levi-Chivita simvoli berilgan bo'lsin. $\varepsilon_{ijk} a_j b_k$ miqdor qanday miqdor?

▷ Ikki indeks yig'ishtirish natijasida 1 – rang psevdovektor hosil bo'ladi. Shuni tekshiramiz. Vektor va Levi-Chivita simvolinig almashish qonunidan $\varepsilon_{ijk}' a_j' b_k' = \det\alpha \cdot \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} \varepsilon_{lmn} \alpha_{jp} a_p \alpha_{kq} b_q$. $\alpha_{jm}\alpha_{jp} = \delta_{mp}$, $\alpha_{kn}\alpha_{kq} = \delta_{nq}$, bo'lgani uchun

$$\varepsilon_{ijk}' a_j' b_k' = \det\alpha \cdot \alpha_{il} \delta_{mp} \delta_{nq} \varepsilon_{lmn} a_p b_q = \det\alpha \cdot \alpha_{il} \varepsilon_{lmn} a_m b_n .$$

$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ begilab tenglikni $c_i' = \det\alpha \cdot \alpha_{il} c_l$ ko'rinishda yozish mumkin. ◀

Tayanch iboralar

Levi-Chivita tenzori, inversiya, psevdovektor, psevdotenzor.

Takrorlash uchun savollar

1. Levi-Chivita tenzorining rangi nechaga teng?
2. Levi-Chivita tenzorining invariant tenzorligini ko'rsating.
3. Qanday vektorlar aksial vektorlar deyiladi?
4. Psevdotenzor qanday miqdor?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Biror koordinatalar sistemasida $C_{ij}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$ tenzor berilgan. $\varepsilon_{ijk}C_{jk}$ miqdorni hisoblang.

2. $\vec{B}=\{1,-1,2\}$, $\vec{C}=\{0,2,1\}$ vektorlar berilgan. $\varepsilon_{ijk}B_jC_k$ miqdorni aniqlang.

3. Koordinata o'qlarini Oz o'qi atrofida 90^0 ga burish va invarsiya natijasida hosil bo'ladigan almashtirish matritsasini quring.

11. Tenzor tahlil elementlari

Agar fazoda yoki uning biror qismida biror n – rang tenzor mos qo'yilgan bo'lsa, n – rang **tenzor maydon** berilgan deyiladi. Biz birinchi bobda 0 – va 1 – rang tenzorlar (skalyar va vektor maydonlar) bilan ish ko'rgan edik.

Tenzor maydonlar uchun ham tenzorlar algebrasining barcha qoidalari saqlanadi.

Dekart koordinatalar sistemasini almashtirishda $\vec{r}(x_1,x_2,x_3)$ radius vektorning almashish qoidasi har qanday vektorning almashish qoidasi kabi bo'ladi:

$$x_i'=\alpha_{ij}x_j. \tag{11.1}$$

$\{x_1',x_2',x_3'\}$ koordinatalarni $\{x_1,x_2,x_3\}$ larning funksiyasi deb qarasak, ya'ni $x_i'=x_i'(x_1,x_2,x_3)$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}=\alpha_{ij}, \tag{11.2}$$

bo'ladi. Teckari almashtirish matritsasi esa

$$\alpha_{ij}^{-1}=\frac{\partial x_i}{\partial x_j'},$$

α_{ij} matritsaning ortagonalligidan $\alpha_{ij}^{-1}=\alpha_{ij}^T=\alpha_{ji}$ bo'ladi. Shuning uchun,

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}=\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}.$$

Tenzor maydonning sodda xossalarini keltiramiz.

➤ Tenzor maydonni skalyar argument bo'yicha differensiallash tenzor rangini o'zgartirmaydi. Buning isboti xosila ta'rifidan kelib chiqadi

$$\frac{dT_{\dots i\dots k\dots}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T_{\dots i\dots k\dots}(t+\Delta t)-T_{\dots i\dots k\dots}(t)}{\Delta t}.$$

➤ Tenzor maydonni radius vektor koordinatalari bo'yicha bir marta differensiallashda uni rangi birga oshadi.

Xaqiqatan ham, ikkinchi rang $T_{ik}(x_1,x_2,x_3)$ tenzor berilgan bo'lsin. Mumkin bo'lgan barcha xususiy hosilalarni qaraylik - $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}$ va uning almashish qonuniga e'tibor beraylik

$$\frac{\partial T_{ik}(x)}{\partial x_m}=\alpha_{i'i}\alpha_{k'k}\frac{\partial T'_{i'k'}(x')}{\partial x_m}=\alpha_{i'i}\alpha_{k'k}\frac{\partial T'_{i'k'}(x')}{\partial x'_n}\frac{\partial x'_n}{\partial x_m}.$$

(11.1) va (11.2) lardan $x'_n=\alpha_{nn'}x_{n'}$, $\frac{\partial x'_n}{\partial x_m}=\alpha_{nm}$. Shuning uchun,

$$\frac{\partial T_{ik}(x)}{\partial x_m}=\alpha_{i'i}\alpha_{k'k}\alpha_{nm}\frac{\partial T'_{i'k'}(x')}{\partial x'_n}.$$

Ya'ni ikkinchi rang tenzordan radius vektor koordinatasi bo'yicha hosila olinganda uchinchi rang tenzorning almashish qonuni bo'yicha o'zgarishini ko'rsatadi.

Xususan, nolinchi rang tenzor – skalyar $\varphi(\vec r)$ maydonning koordinatalar bo'yicha xususiy hosilasini ko'raylik.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\left(\alpha^T_{jk}x'_k\right)}{\partial x'_i}=\alpha^T_{jk}\delta_{ki}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=\alpha_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}.$$

1-*misol.* $\varphi(\vec r)=r$ maydonning gradientini tenzor qoidalari bo'yicha topaylik.

$$\triangleright(\mathrm{grad}r)_i=\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_nx_n}=\frac{1}{2\sqrt{x_nx_n}}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_mx_m)=\frac{1}{2r}2x_m\frac{\partial x_m}{\partial x_i}=\frac{x_m}{r}\delta_{mi}=\frac{x_i}{r}.$$

Bundan $\mathrm{grad}r=\vec r/r$ kelib chiqadi.◀

Tenzor belgisi yordamida $\vec a(\vec r)$ vektor maydonning divergensiyasi

$$\mathrm{div}\vec a=\left(\vec\nabla,\vec a\right)=\frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

va rotorini

$$\mathrm{rot}\vec a=\vec e_i\left[\vec\nabla,\vec a\right]_i=\vec e_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}a_k,$$

ko'rinishda yozish mumkin.◀

2-*misol.* $\vec a(\vec r)=r\vec r$ maydonning divergensiya va rotorini hisoblaylik.

$$\triangleright\ \mathrm{div}(r\vec r)=\left(\vec\nabla,r\vec r\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}rx_i+r\delta_{ii}=x_i\frac{x_i}{r}+3r=4r.$$

$$\left(rot(r\vec r)\right)_i=\left[\vec\nabla,r\vec r\right]_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}rx_k=\varepsilon_{ijk}\left(x_k\frac{x_j}{r}+r\delta_{jk}\right)=0.◀$$

1-ILOVA. VEKTORLARGA OID ASOSIY MA'LUMOTLAR

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi – $(\vec{a},\vec{b})$ skalyar miqdor bo'lib, quyidagi xossalarga ega:

- $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$,
- $(\vec{a},\vec{a})\geq 0$,
- $(\vec{a},(\alpha\vec{b}_1+\beta\vec{b}_2))=\alpha(\vec{a},\vec{b}_1)+\beta(\vec{a},\vec{b}_2)$.

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

formuladan, yoki

$$(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

formuladan hisoblanadi. Bu yerda $|\vec{a}|$ va $|\vec{b}|$ – $\vec{a}$ и $\vec{b}$ vektor uzunliklari, θ- $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak , a_1, a_2 va a_3- $\vec{a}$ vektorni *Ox*, *Oy* va *Oz* o'qlardagi proyeksiyalari

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$

Vektorlarning vektor ko'paytmasi. Quyidagi xossalarga ega bo'lgan vektor $\vec{a}\times\vec{b}\equiv[\vec{a}\vec{b}]\equiv[\vec{a},\vec{b}]$:

- $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$,
- $[\vec{a},(\alpha\vec{b}_1+\beta\vec{b}_2)]=\alpha[\vec{a},\vec{b}_1]+\beta[\vec{a},\vec{b}_2]$,.

$[\vec{e}_1,\vec{e}_2]=\vec{e}_3$, $[\vec{e}_2,\vec{e}_3]=\vec{e}_1$, $[\vec{e}_3,\vec{e}_1]=\vec{e}_2$

($\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ – ortlar). Vektor ko'paytmaning moduli ko'paytuvchi vektorlardan tuzilgan parallelogram yuziga teng:

$$|[\vec{a},\vec{b}]|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$$

Vektor ko'paytmaning koordinatalari quyidagi formuladan topiladi:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{e}_1(a_2b_3-a_3b_2)+\vec{e}_2(a_3b_1-a_1b_3)+\vec{e}_3(a_1b_2-a_2b_1)$$

Ikkilangan vektor ko'paytma uchun quyidagi formula o'rinlidir:

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-(\vec{a}\vec{b})\vec{c}.$$

Vektorlarning aralash ko'paytmasi. $(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$ - skalyar miqdor bo'lib, uning moduli ko'paytuvchi vektorlardan tuzilgan paralellopipedning hajmiga teng. Vektorlarning aralash ko'paytmasi siklik almashtirishlarda o'zgarmaydi. Ikki ixtiyoriy vektorlar ornini almashtirilganda esa aralash ko'paytma ishorasini o'zgartiradi:

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right)=\left(\vec{b},\left[\vec{c}\vec{a}\right]\right)=\left(\vec{c},\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right)=-\left(\vec{a},\left[\vec{c}\vec{b}\right]\right)=-\left(\vec{b},\left[\vec{a}\vec{c}\right]\right)=-\left(\vec{c},\left[\vec{b}\vec{a}\right]\right)$$

Aralash ko'paytmadagi ixtiyoriy ikki vektor kolleniar bo'lsa, aralash ko'paytma nolga teng. Aralash ko'paytma quyidagicha hisoblanadi:

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\pm V$$

Bu yerda V $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan hosil qilingan parallelopiped hajmi. Agar uchlik vektor o'ng sistemani tashkil qilsa + isora bilan, chap sistemani tashkil qilsa - ishora bilan olinadi.

$\vec{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{H}\,(a,b,c)$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislikning vektor shakldagi ko'rinishi

$$\left((\vec{r}-\vec{r}_0),\vec{H}\right)=0$$

bo'ladi, koordiatalar shakldagi ko'rinishi:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

$\vec{H}\,(a,b,c)$ vektorga parallel $\vec{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{H},$$

ko'rinishda bo'ladi, t ixtiyoriy haqiqiy son. Bu tenglamaning koordinatalardagi ko'rinishi :

$$x=x_0+ta$$

$$y=y_0+tb$$

$$z=z_0+tc$$

Chiziqqa o'tkazilgan urinma tenglamasi. Fazoviy L chiziq tenglamasi $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $\alpha<t<\beta$ bo'lsin. $(\alpha<t<\beta)$. $M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))\in L$ biror nuqta bo'lsin. L chiziqning M_0 nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

L chiziqning M_0 nuqtasiga o'tkazilgan **normal tekislik** tenglamasi:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

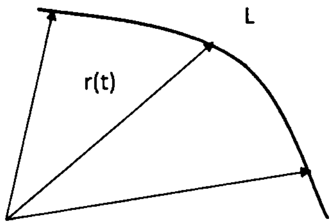
S sirt tenglamasi *F(x,y,z)*=0 ko'rinishda bo'lsin. Sirtning $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan **urinma tekislik** tenglamasi:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Sirtning $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan **normal** tenglamasi:

$$\frac{(x-x_0)}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}+\frac{(y-y_0)}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}+\frac{(z-z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}=0$$

Skalyar argumentli vektor funksiya. *Agar t parametrning har bir qiymatiga biror* $\vec{a}(t)$ *vektor mos qo'yilsa, bu vektorga skalyar argumentli vektor funksiya deyiladi.*



1-rasm

$\vec{a}(t)$ vektorning boshi koordinatalar boshidan chiqqan deb qaraymiz. U holda t parametrning o'zgarishi natijasida koordinatalari $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ dan iborat bo'lgan $\vec{a}(t)$ vektorning oxiri parametrik tenglamalari

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),$$

ko'rinishda berilgan biror L chiziqni ifodalaydi (1- rasm).

$\vec{a}(t)$ vektor L chiziqning radius vektori bo'lgani uchun yagona

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

vektor tenglama orqali ifodalash mumkin.

Ta'rif. *t parametrning o'zgarishi natijasida* $\vec{r}(t)$ *vektorning oxirini ifodalovchi nuqtalarning geometrik o'rni L chiziqqa vektor funksiyaning godografi deyiladi (1 – rasm).*

Agar $\vec{a}(t)$ vektorning faqat moduli o'zgarsa uning godografi koordinata boshidan chiqadigan nurdan iborat bo'ladi. Agar $\vec{a}(t)$ vektorning moduli o'zgarmas bo'lib, ($|\vec{a}(t)|=const$) uning faqat yo'nalishi o'zgarsa uning godografi markazi koordinata boshida bo'lgan radiusi vektor moduliga teng bo'lgan sferada yotuvchi chiziqdan iborat bo'ladi.

Skalyar argumentli vektor funksiya limiti. *Yetarli darajada kichik ixtiyoriy* $\varepsilon>0$ *son uchun* $|t-t_0|<\delta$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha t lar uchun*

$$|\vec{r}(t)-\vec{A}|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\vec{A}$ *vektor* $\vec{r}(t)$ *vektorning* $t \to t_0$ *dagi limiti deb aytiladi va u quyidagicha yoziladi* $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{A}$

Xossalari:

Agar $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t) = \vec{A}$ ãà $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{b}(t) = \vec{B}$ bo'lsa,

a) $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\vec{a}(t) \pm \vec{b}(t)\right) = \vec{A} \pm \vec{B}$

b) $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\vec{a}(t)\vec{b}(t)\right) = (\vec{A}\vec{B})$

bo'ladi, bu yerda $\left(\vec{a}(t), \vec{b}(t)\right)$ – skalyar ko'paytma.

Agar $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ bo'lib, $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{A}$ va $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ bo'lsa, u holda quyidagi xossa o'rinli bo'ladi

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \qquad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \qquad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3$$

Vektor funksiyadan skalyar argument bo'yicha hosila. *Agar vektor funksiya* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (t_0, t_1) *oraliqda t ning har bir qiymatida aniqlangan bo'lsin. t* (t_0, t_1) *oraliqda* Δt *orttirma olganda* $\vec{r}$ *vektor* Δr *orttirma olsin. U holda* $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ *limit mavjud bo'lsa, unga vektordan olingan hosilasi deyiladi.*

Uni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Agar $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ bo'lsa, u holda $\frac{d\vec{r}}{dt}$ quyidagiga teng bo'ladi

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \qquad (1)$$

Skalyar argumentli vektor funksiyadan olingan hosilaning geometrik ma'nosi. Skalyar argumentli vektor funksiyadan biror nuqtasida olingan hosila berilgan vektor funksiya godografining shu nuqtasiga o'tkazilgan urinma bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

Skalyar argumentli vektor funksiyadan olingan hosilaning mexanik ma'nosi. Biror harakatlanayotgan nuqtaning radius vektoridan olingan hosila nuqtaning shu momentdagi tezligiga teng:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'$$

Vektor funksiyadan differensial olishning asosiy qoidalari:

1. Agar $\vec{c}$-o‘zgarmas vektor bo‘lsa, $\frac{d\vec{c}}{dt}=0$ bo‘ladi.

2. Vektor funksiyalar yig‘indisining differensiali alohida differensiallar yig‘indisiga teng bo‘ladi, yani $\frac{d(\vec{a}(t)\pm\vec{b}(t))}{dt}=\frac{d(\vec{a}(t))}{dt}\pm\frac{d(\vec{b}(t))}{dt}$.

3. $\vec{a}(t)$ vektor funksiya bilan $m(t)$ skalyar funksiya ko‘paytmasining hosilasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{d(m\vec{a})}{dt}=m\frac{d\vec{a}}{dt}+\vec{a}\frac{dm}{dt}.$$

4. $\frac{d(\vec{a}\vec{b})}{dt}=\left(\vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt}\right)+\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b}\right).$

5. $\frac{d\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{dt}=\left[\frac{d\vec{a}}{dt},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\frac{d\vec{b}}{dt}\right].$

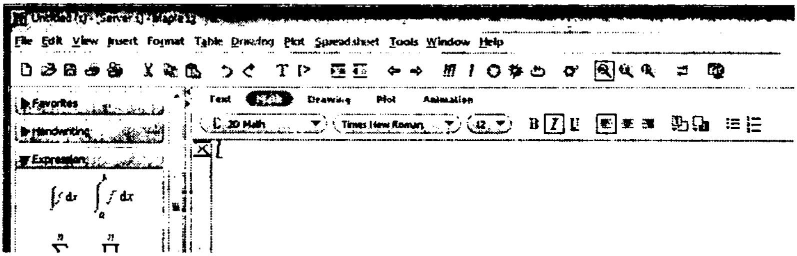
2-ILOVA. VEKTOR TAHLIL KURSIDA MAPLE TIZIMIDAN FOYDALANISH

Maple - bu kompyuterda analitik va sonli hisoblashlarni bajaruvchi, algebra, geometriya, matematik analiz, differenstial tenglamalar, diskret matematika, fizika, statistika, matematik fizika, vektor va tenzor masalalarini dastur tuzmasdan yechish imkoniyatini beruvchi matematik tizim (sistema)–paketdir.

Maple simvolli va sonli hisoblashlarni tez va effektiv bajarish uchun mo'ljallangan hamda elektron xujjatlarni tayyorlash va grafik vizuallashtirish, interaktiv vositalariga ega bo'lgan kompyuter matematikasining yetakchi tizimlaridan biridir.

Biz bu yerda foydalanuvchi Maplening elementar komandalari bilan tanish deb faraz qilamiz. Bu yerda bayon qilinadigan barcha ma'lumotlar Maple 13 tizimida olib boriladi.

Maple ishga tushirilgandan so'ng uning ko'rinishining bir qismi quyidagicha bo'ladi.



1. Chiziqlar va sirtlar grafigini qurish

Oshkor ko'rinishda berilgan chiziq grafigini qurish. $y=f(x)$ ko'rinishdagi funksiya grafigini Ox o'qining $a \le x \le b$ oraliqdagi va Oy o'qining $c \le y \le d$ oraliqdagi grafigini ekranda yoritish uchun **plot(f(x), x=a..b, y=c..d, parametrlar)** komandasidan foydalaniladi, **parametrlar** tasvirni qayd qilish usullarini ifodalaydi. Komandada **parametrlar** tushib qoldirilishi mumkin, unda avvaldan kelishish qoidasi ishlaydi.

Plot komandasining asosiy **parametrlari**:

- **title='text', text** grafikning sarlavhasi;

• **coords=polar** – polyar koordinatalar sistemasini o'rnatish (**coords** parametri tushib qoldirilsa, dekart koordinatalar sistemasi ishlaydi);

• **axes** – koordinata o'qlarining turini aniqlaydi: **axes=normal** oddiy o'qlar; **axes=boxed** – grafik ramkaga olinadi; **axes=frame** – o'qlar tasvirning pastki chap burchagida joylashadi; **axes=none** – tasvirda o'qlar keltitilmaydi;

• **scaling** – tasvir masishtabini aniqlaydi: **scaling=constrained** o'qlar bo'yicha mashtab bir xil; **scaling=unconstrained** grafik darcha o'lchamiga qarab aniqlanadi;

• **style** – grafik chizig'ining ko'rinishini aniqlaydi: **style=line** - tutash chiziqlar, **style=point** – grafik nuqtalar ko'rinishida;

• **color** - chiziq rangini berish uchun ishlatiladi, masalan, **color=yellow** parametrida chiziq rangi sariq rangda chiqadi;

• **xtickmarks=nx** va **ytickmarks=ny** – *Ox* va *Oy* o'qidagi belgilar soni;

• **thickness=n,** n=1,2,3..- chiziq qalinligi (bu parametr keltirilmasa n=1 bo'ladi);

• **symbol=s** – simvol turini aniqlaydi: **box, cross, circle, point, diamond;**

• **font=[f,style,size]** – tekstni chiqarishning shriftini aniqlaydi: **f** – **TIMES, COURIER, HELVETICA, SYMBOL**; **style** shrift stelini aniqlaydi – **BOLD, ITALIK, UNDERLINE, size** – shrift o'lchami;

• **labels=[x,y]** – koordinata o'qlarini belgilash (nomlash).

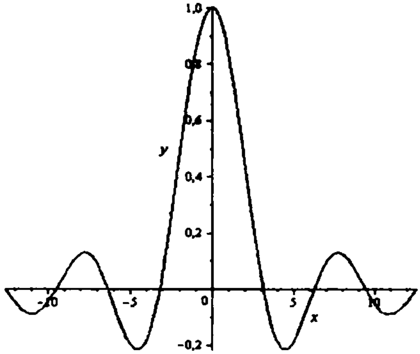
plot komandasi yordamida parametric ko'rinishda **y=y(t), x=x(t)** berilgan chiziqlar garfigini ham chiqarish mumkin, bunda komanda **plot([y=y(t), x=x(t), t=a..b],parametrlar)** ko'rinishda bo'ladi.

1 - *misol.* $y=\frac{\sin x}{x}$ funksiya $-4\pi \le x \le 4\pi$ oraliqdagi grafigi Mapleda quring.

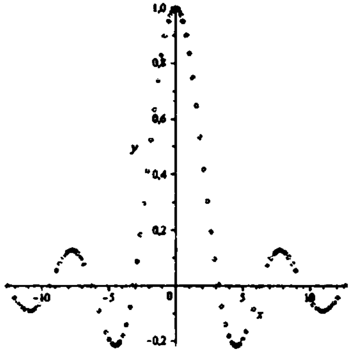
▷ **plot(sin(x)/x, x=-4*Pi..4*Pi, labels=[x,y], labelfont=[TIMES, ITALIC,12], thickness=2);** komandasi bajarilishi natijasida ekranda 1 –rasmdagi grafik namoyon bo'ladi. Agar komandada **plot(sin(x)/x, x=-4*Pi..4*Pi, labels=[x,y], labelfont=[TIMES,ITALIC,12], thickness=2, style=point, symbol=circle);** ko'rinishda o'zgartirilsa uning natijasida 2 –rasmdagi grafik hosil bo'ladi. ◀

2 – *misol.* *x=sin2t, y=cos3t,* $0 \le t \le 2\pi$ parametrik ko'rinishda berilgan funksiya frafigini Mapleda ramkaga olib quring.

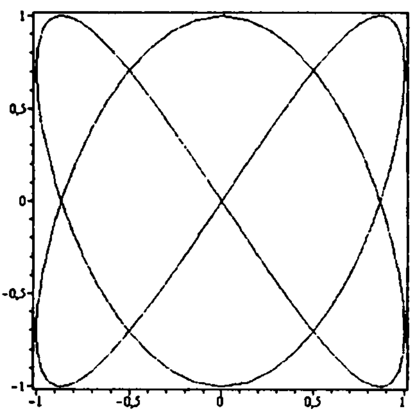
▷ **plot([sin(2*t),cos(3*t),t=0..2*Pi], axes=boxed, color=blue);** komandasining natijasida 3 – rasmdai grafik hosil bo‘ladi. ◀



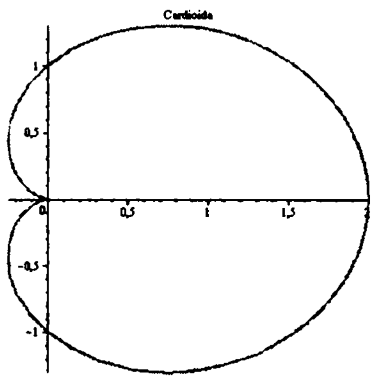
1 - rasm



2 - rasm



3 - rasm



4 - rasm

3 *–misol.* Polyar koordinatalarda berilgan kardiodaning $\rho = 1+\cos\varphi$ grafigini nomi bilan quring.

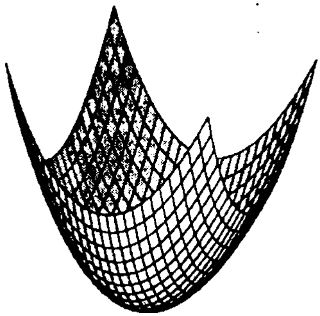
▷ **plot(1+cos(x), x=0..2*Pi, title="Cardioida", coords=polar, color=gold, thickness=3);**
komandasning natijasida 4 – rasmdagi grafik namoyon bo‘ladi. ◀

Oshkormas funksiya grafigini qurish. Oshkormas $F(x,y)=0$ funksiya grafigini qurish uchun avval **plots** paketini sozlaymiz: **with(plots),** so‘ng **implicitplot(F(x,y)=0, x=x1..x2, y=y1..y2)** komandasini qo‘llaymiz.

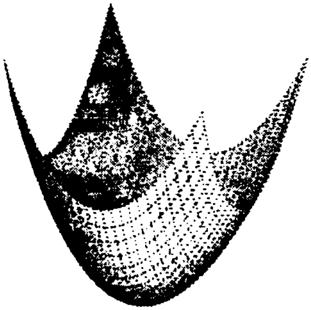
Oshkor ko'rinishda berilgan sirt grafigini qurish. $z = f(x, y)$ ko'rinishda berilgan funksiyaning grafigini Mapleda qurish uchun **plot3d(f(x,y), x=x1...x2, y=y1...y2, parametrlar)** komandasidan foydalanamiz. Bu komanda yordamida funksiyaning $x1 \le x \le x2,\ y1 \le y \le y2$ sohadagi grafigi namoyon bo'ladi.

1-*misol.* $z = x^2 + y^2$ funksiyaning $-2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2$ sohadagi grafigini quring.

▷ Buning uchun **plot3d(x^2+y^2,x=-2..2,y=-2..2);** komanda yordamida berilgan funksiyaning grafigi ekranda yoritiladi (5 –rasm), **plot3d(x^2+y^2,x=-2..2,y=-2..2, linestyle=dot)** komandasi yordamida 6 - rasmdagi grafigi hosil bo'ladi.



5-rasm



6-rasm

Grafik ekranda namoyon bo'lgandan so'ng uni belgilab, har xil holatlarda namoyon qilish mumkin. Buning uchun sichqonchaning o'ng tugmasidan foydalaniladi.◀

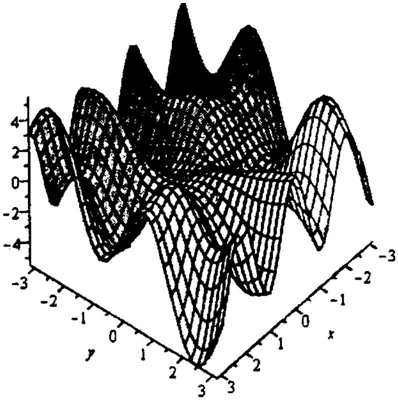
2-*misol.* $z = x \sin 2y + y \cos 3x$ funksiyaning $(x, y) \in [-\pi, \pi]$ sohadagi grafigini qurish.

▷ Buning uchun Mapleda

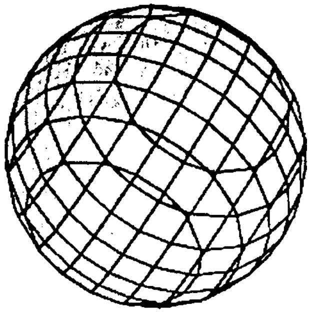
plot3d(x*sin(2*y)+y*cos(3*x),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi, grid=[30,30],axes=framed);

komandasini teramiz va enter tugmasi bosilgandan so'ng ekranda 7 – rasmdagi grafik hosil bo'ladi.◀

Oshkormas ko'rinishda berilgan sirt grafigini qurish. Oshkormas ko'rinishda berilgan $F(x, y, z) = c$ funksiya grafigini qurish uchun **implicitplot3d(F(x,y,z) =c, x=x1..x2, y=y1..y2,z=z1..z2)** komandadan foydalaniladi.



7 - rasm



8 - rasm

Misol. Tenglamasi $x^2+y^2+z^2=4$ ko'rinishdagi sharni qurish.

▷ Mapleda quyidagi komandani kiritamiz.

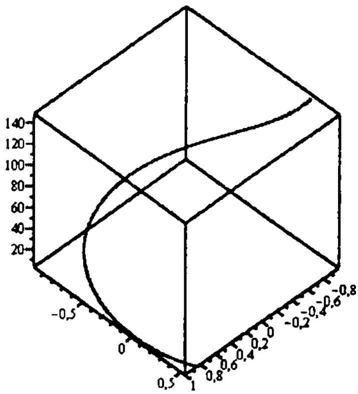
with(plots): implicitplot3d(x^2+y^2+z^2=4,
x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2, scaling=CONSTRAINED);

komanda bajarilishi natijasida 8 - rasmdagi shar qayd qilinadi. ◀

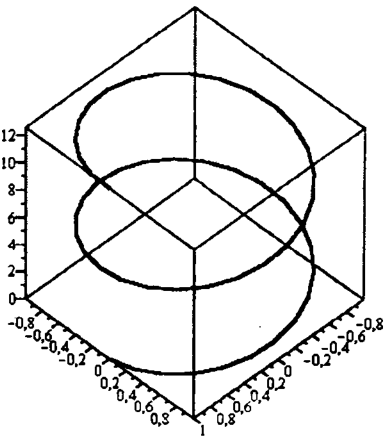
Fazoviy chiziq grafigini qurish. $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ parametrik ko'rinishda berilgan chiziqning Mapleda grafigini qurish uchun

spacecurve([x(t),y(t),z(t)],t=t1..t2);

komandadan foydalaniladi.



9 – rasm



10 – rasm

Misol. Tenglamasi $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = e^t$ ko'rinishda berilgan chiziqning grafigini qurish.

▷ Buning uchun

spacecurve([sin(t),cos(t),exp(t)], t=1..5, color=blue, thickness=2, axes=BOXED);

komandasi yordamida 9-rasmdagi grafik hosil bo'ladi (**color** parametri chiziq rangini ifodalaydi, **thickness** parametri esa, chiziq qalinligini ifodalaydi).

Sirtlar va chiziqlarni Maplening maxsus paketlaridan biri bo'lgan «**Vector Calculus**» paketidan foydalanib ham qurish mumkin. Buning uchun

with(VectorCalculus):

komanda yordamida paket sozlanadi. Shundan keyin, masalan,

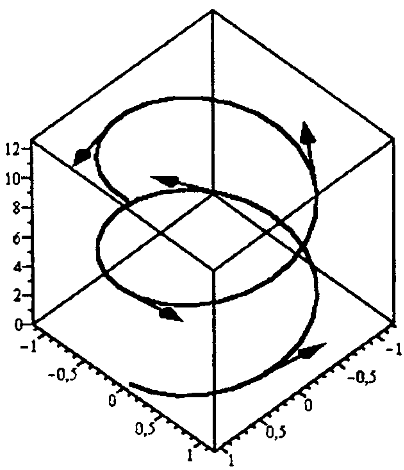
r:=PositionVector([cos(t),sin(t),t]);

komandasi ishga tushirilganda parametrik tenglamasi *x=cost, y=sint, z=t* ko'rinishdagi vektor qayd qilinadi:

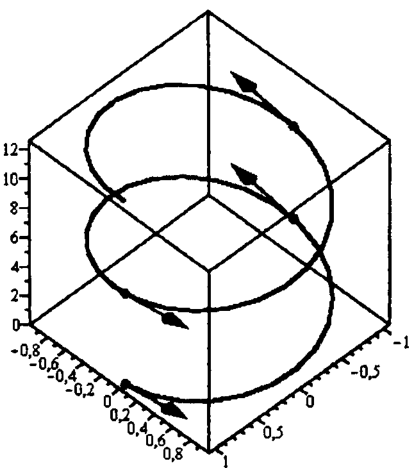
$$r := \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}$$

PlotPositionVector(r,t=0..4*Pi,curveoptions=[axes=boxed]);

komandasi fazoviy chiziqning $t \in [0, 4\pi]$ oraliqdagi grafigini ekranda yoritadi (10 –rasm).



11 - rasm



12 - rasm

Agar yuqoridagi komandaga quyidagicha o‘zgartirish kiritilsa, chiziqning urinma vektorlarini ham ko‘rsatadi (11 – rasm).

PlotPositionVector(r,t=0..4*Pi, tangent=true, curveoptions=[axes=boxed]);

Agar komandada urinma vektorni qaysi nuqtalarda o‘tkazish kerakligi ham ko‘rsatilsa, masalan, quyidagi komanda:

PlotPositionVector(r,t=0..4*Pi, tangent=true, points=[0,Pi,2*Pi,3*Pi],curveoptions=[axes=boxed]);

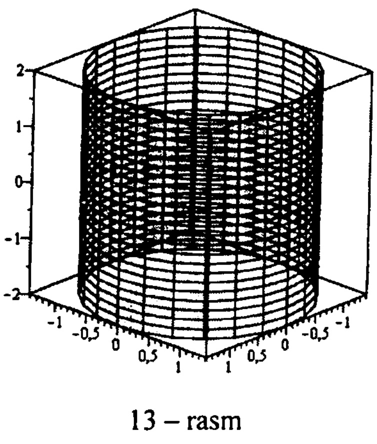
bajarilishi natijasida ekranda 12 – rasmdagi chiziq qayd qilinadi.

R:=PositionVector([sqrt(2)*cos(u),sqrt(2)*sin(u),v]);

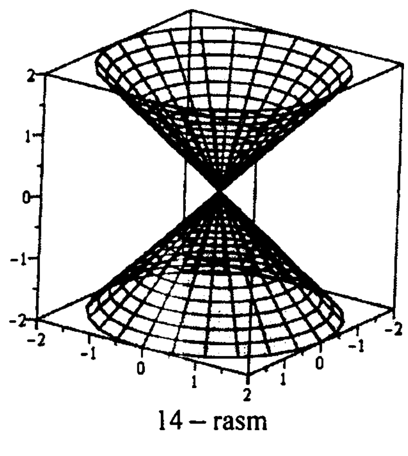
komanda ishga tushirilganda parametrik tenglamasi $x=\sqrt{2}\cos u,\ y=\sqrt{2}\sin u,\ z=v,$ ko‘rinishda bo‘lgan radiusi 2 ga teng bo‘lgan silindrik sirtni aniqlaydi:

$$R := \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos(u) \\ \sqrt{2}\sin(u) \\ v \end{bmatrix}$$

va



13 – rasm



14 – rasm

PlotPositionVector(R,u=0..2*Pi,v=-2..2,surfaceoptions=[axes=boxed]);

komanda natijasida ekranda 13 – rasmda keltirilgan ko‘rinishdagi silindrik sirt namoyon bo‘ladi.

w:= PositionVector([v*cos(u),v*sin(u),v]);

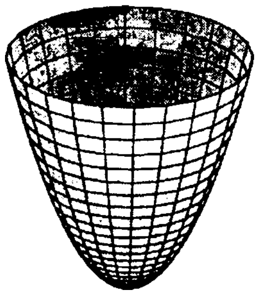
PlotPosition(w,u=0..2*Pi,v=-2..2, surfaceoptions=[axes=boxed]); komandalarning bajarilishi natijasida ekranda 14 – rasmdagi sirt qayd qilinadi.

Sirtlarning grafigini qurishda silindrik yoki sferik koordinatalar sistemasidan foydalanish mumkin. Masalan, quyidagi komandalar:

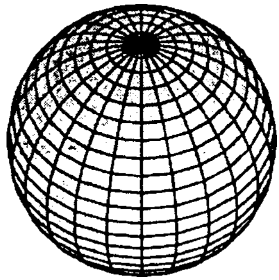
plot3d([r,theta,r^2],theta=0..2*Pi, r=0..2,coords=sylidrical);

plot3d([1,theta,phi],theta=0..2*Pi, phi=0..Pi, coords=spherical);

yordamida ekranda 15 - va 16 – rasmlar paydo bo'ladi.



15- rasm



16- rasm

2. Sath chiziqlarini qurish

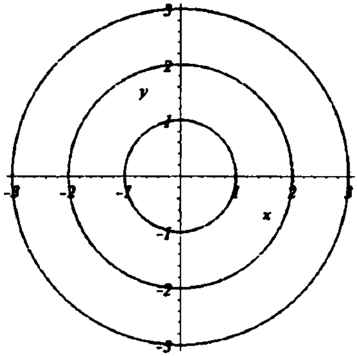
Skalyar maydonning sath sirt va chiziqlarini chizish uchun **contourplot** va **contourplot3d** komandalaridan foydalaniladi.

Misol. $z = x^2 + y^2$ funksiyaning 1, 4 va 9 teng bo'lgan sath chiziqlarini qurish.

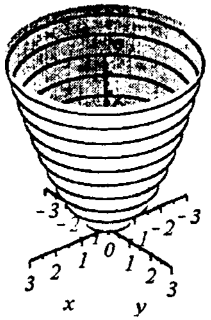
▷Buning uchun

contourplot(x^2+y^2,x=-3..3,y=-3..3,countours=[1,4,9], coloring [black, black, black], axesfont=[TIMES,ITALIC,20], labelfont=[TIMES,ITALIC,20], thickness=3);

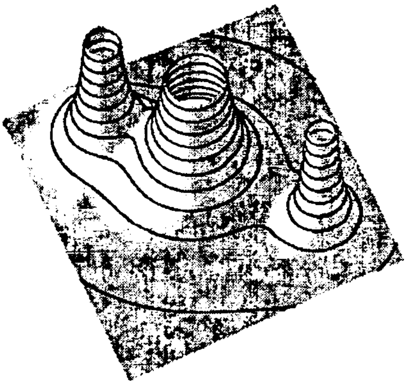
komandani ishga tushirgandan so'ng, ekranda 17- rasmdagi grafik hosil bo'ladi.



17 - rasm



18 - rasm



19 - rasm

Sath chiziqlarini **plot3d** komandasida **style=PATCHCONTOUR** parametr bilan ham amalga oshirsa bo'ladi. Masalan, quyidagi komanda bajarilganda

plot3d(x^2+y^2, x = -3..3, y = -sqrt(9- x^2)..sqrt(9-x^2), axes = normal, axesfont=[TIMES,ITALIC,20], labelfont=[TIMES,ITALIC,20],thickness=3, style=PATCHCONTOUR);

bo'yicha ekranda 18- rasmdagi grafik hosil bo'ladi.

Misol. $z = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{0,2}{(x+1,2)^2 + (y-1,5)^2} + \frac{0,3}{(x-0,9)^2 + (y+1,1)^2}$ sirtning grafigini sath chiziqlari bilan quring.

▷ Buning uchun quyidagi komanda

plot3d(1/(x^2+y^2)+0.2/((x+1.2)^2+(y-1.5)^2)+0.3/((x-0.9)^2+(y+1.1)^2), x=-2..2, y=-2..2.5, view=[-2..2, -2..2.5, 0..6], grid=[60,60], shading=NONE, light=[100,30,1,1,1], axes=NONE, orientation=[65,20], style=PATCHCONTOUR);
yordamida ekranga 19 – rasmdagi grafik chiqadi.◀

3. Vektor maydon

Vektor maydon amallari ustida Mapledan foydalanishda quyidagi komandalar yordamida sozlanadi:

with(plots): with(VectorCalculus):

Vektorni Mapleda yozish usullari ko'p, masalan

u=<a,b,c>; v:=<l,m,n>, w:=[x,y,z];

komandalar yordamida **u, v** va **w** vektorlar hosil qilinadi:

$$u := (a)e_x + (b)e_y + (c)e_z$$

$$v := (l)e_x + (m)e_y + (n)e_z$$

$$w := [x, y, z]$$

Bu yerda e_x, e_y, e_z ortlardir.

DotProduct(u,v);yoki **u.v**

komandalar vektorlarning skalyar ko'paytmasini beradi:

$$a\,l + b\,m + c\,n.$$

CrossProduct(<a,b,c>,<d,e,f>) yoki **(<a,b,c>)&x(<d,e,f>)**

komandalar yordamida esa, ikki vektorning vektor ko'paytmasi topiladi:

$$(b\,f - c\,e)e_x + (c\,d - a\,f)e_y + (a\,e - b\,d)e_z$$

norm(u,2)

komandasi yordamida vektorning uzunligi topiladi:

$$\sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}.$$

Skalyar maydon gradienti. Yo'nalish bo'yicha hosila. Vektor maydonlar bilan ish ko'rishda, avval, koordinatalar sistemasini yuklash kerak. Masalan, dekart koordinatalar sistemasini o'rnatish uchun

SetCoordinates('cartesian'$_{x,y,z}$);

komandasidan foydalaniladi. Biror skalyar maydonning gradientini topish uchun quyidagi komanda bajariladi:

gradF:=Gradient(x^2*cos(y*z)); yoki **Nabla(x^2*cos(y*z));**

va uning bajarilishi natijasida

$$gradF := 2\,x\cos(y\,z)\bar{e}_x - x^2\sin(y\,z)\,z\bar{e}_y - x^2\sin(y\,z)\,y\bar{e}_z$$

$F = x^2\cos(yz)$ skalyar maydonning gradient topiladi. Bu yerda $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ lar dekart koordinatalar sistemasining ortlaridir.

Yo‘nalish bo‘yicha hosilani topish uchun **DirectionalDiff(f,v,c)** komandasidan foydalaniladi. Bu yerda **f** skalyar maydon, **v** yo‘nalishni ko‘rsatuvchi vektor, **c** tanlangan koordinatalar sistemasi.

Misol. $x^2 + y^2 + z^2$ skalyar maydonning $\{3,4,0\}$ vektor yo‘nalishdagi hosilasini toping.

▷ **DirectionalDiff(x^2+y^2+z^2,<3,4,0>,'cartesian'$_{x,y,z}$);**
komandasi ishlatilganda

$$\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y$$

maydonning yo‘nalish bo‘yicha hosilasi topiladi.

Yo‘nalish bo‘yicha hosilaning biror nuqtadagi, masalan, (2,1,1) nuqtadagi, qiymatini hisoblash zaruriyati bo‘lsa, quyidagi komandani ishlatsak

DirectionalDiff(x^2+y^2+z^2,point=[2,1,1],<3,4,0>,'cartesian'$_{x,y,z}$);

ekranda 4 qiymat chiqadi.◀

Vektor maydon divergensiya va rotori. Laplasian. Vektor maydon divergensiyasi va rotorini Mapleda hisoblash uchun koordinatalar sistemasi sozlangandan so‘ng vektor maydon berilib **Divergence** va **curl** komandalaridan foydalaniladi. **VectorField** komandasi yordamida vektor maydon beriladi.

Misol. $\bar{a} = \left\{\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{z}{x^2+y^2}\right\}$ vektor maydonning divergensiya va rotorini toping.

▷ **a:= VectorField((x,y,z)/(x^2+y^2));**
komanda yordamida vektor maydon aniqlanadi:

$$a := \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\bar{e}_x + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\bar{e}_y + \left(\frac{z}{x^2+y^2}\right)\bar{e}_z$$

Diva:=Divergence(a) va **rota:=curl(a)** komandalari bajarilishi natijasida maydonning divergensiya va rotori aniqlanadi:

$$diva := -\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{3}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$rota := -\frac{2zy}{(x^2+y^2)^2}\bar{e}_x + \frac{2zx}{(x^2+y^2)^2}\bar{e}_y$$

simplify(diva); komandasi esa soddalashtirib $\frac{1}{x^2+y^2}$ ifoda hosil qiladi. Xuddi shunday natijalarga **diva:=Nabla.a; rota:=Nabla &x a;** komandalar yordamida ham erishish mumkin.◀

Skalyar maydonning Laplas operatorni topish uchun **Laplacian(f,c)** komandasi ishlatiladi. Bu yerda **f** skalyar maydon **c** esa koordinatalar turini aniqlaydigan parametr. Vektor maydonning Laplas vektorini topish uchun esa **Laplacian(a)** komandadan foydalaniladi. Bu yerda **a** biror vektor maydon.

Misol. $x^2+y^2+z^2$ funksiyaning Laplas operatorini topaylik.

▷ Buning uchun

Laplacian(x^2+y^2+z^2,'cartisian'$_{x,y,z}$);

komandasini bajarilishi natijasida 6 soni qayd qilinadi.◀

Misol. v={x^3,y^2,z} vektor maydonni Laplas operatorini topaylik.

▷ Buning uchun

Laplacian(VectorField(<x^3,y^2,z>,'cartisian'$_{x,y,z}$));

komandani teramiz va uni ishga tushirsak

$$6x\bar{e}_x+2\bar{e}_y$$

ma'lumot ekranga chiqadi.◀

Vektor maydonni grafik usulda tasvirlash. Vektor maydonlarni grafik tasvirlash uchun **fieldplot(f,r1,r2,p)** va **fieldplot3d(f,r1,r2,r3,p)** komandalari ishlatialdi. Bu yerda **f** vektor maydon, **r1** va **r2** lar argumentlarning o'zgarish diapazoni, **p** esa grafikka taalluqli parametrlar.

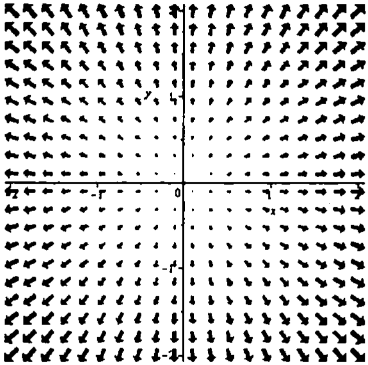
Misol. {x,y} va {y,-x} vektor maydonlarning grafigini Mapleda chizishni ko'raylik.

▷$\{x,y\}$ vektor maydon tasvirini **fieldplot([x,y],x=-2..2, y= - 2,2, arraws=thick)** ko'rinishdagi komanda yordamida amalga oshirsak 20 – rasmdagi tasvir hosil bo'ladi. 21 – rasmdagi grafik esa **fieldplot([y,-x],x=-2..2, y= - 2,2, arraws=slim,thickness=2)** komanda yordamida hosil qilingan.

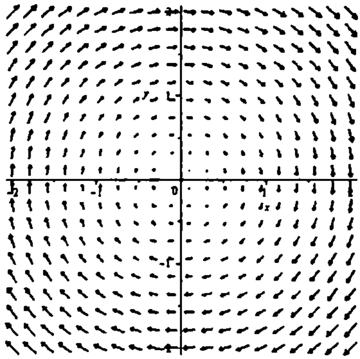
Albatta, rasm chiqishi uchun avval, **with(plots)** komandasi ishga tushirilgan bo'lishi kerak. Bu grafiklardan vektor maydonning shu nuqtadagi yo'nalishi va uning miqdori aks ettirilgan. ◀

Misol. $\left\{\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2+0.1}-\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2+0,1};\frac{y}{(x-1)^2+y^2+0.1}-\frac{y}{(x+1)^2+y^2+0,1}\right\}$

vektor maydonning tasvirini keltiring.



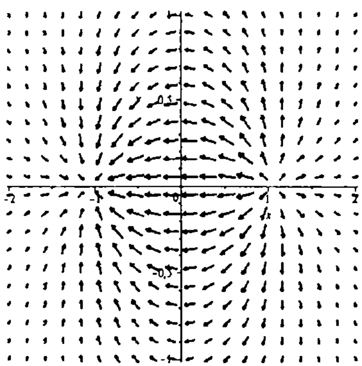
20 -rasm



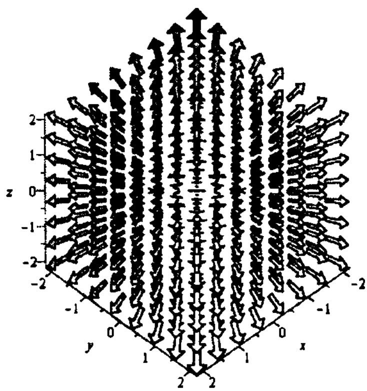
21 - rasm

▷ Buning uchun quyidagi komandalar ketma-ketligini terib chiqamiz:

xc:=(x-1)/((x-1)^2+y^2+0.1)-(x+1)/((x+1)^2+y^2+0.1);
yc:=y/((x-1)^2+y^2+0.1)-y/((x+1)^2+y^2+0.1);
fieldplot([xc,yc],x=-2..2,y=-1..1,arrows=slim,thickness=2);



22 - rasm



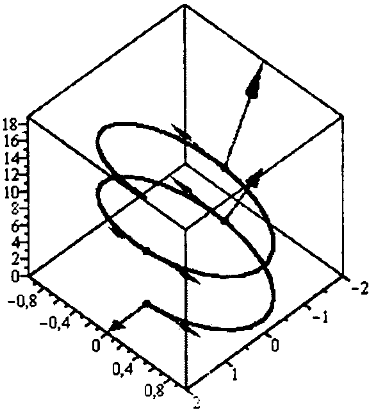
23 - rasm

Olingan grafik magnit maydoni dipolining yoki manba va qurdimdan iborat bo‘lgan suyuqlik tezliklar maydonini eslatadi (22 – rasm).◀

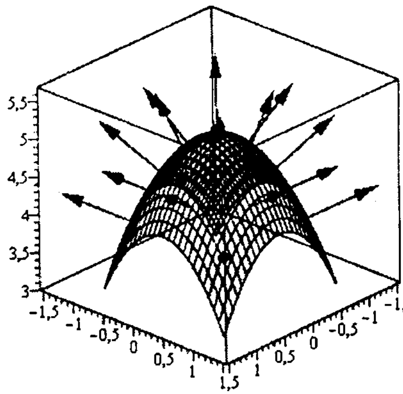
Misol. {x,y,z} vektor maydon grafigini tasvirlang.

▷ **fieldplot3d([x, y, z], x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, z = -2 .. 2, arrows = ‘THICK’, axes = ‘framed’);**

komanda yordamida 23 – rasmdagi vektor maydon grafigi hosil bo‘ladi.◀



24 - rasm



25 - rasm

Biz yuqorida **PlotPositionVector** komandasi bilan tanishgan edik. Bu komanda yordamida fazoviy chiziqda yoki sirtda joylashgan vektor maydon yo‘nalishini ham keltirish mumkin. Buning uchun komandada **vektorfield** parametrini kiritish kifoya.

Misol. Parametrik tenglamasi {cost,sint,t} ko‘rinishda bo‘lgan speral chizig‘ining $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ nuqtalariga o‘tkazilgan urinma va radius vektorlarning chizmasini keltiring.

▷ Buning uchun quyidagi komandalarni kiritamiz:

r := PositionVector([cos(t), sin(t), t]):

F := VectorField(<x, y, z>, 'cartesian'[x, y, z]):

PlotPositionVector(r, t = 0 .. 4*Pi), vektorfield = F, tangent = true, points = [0, Pi, 2*Pi, 3*Pi)], curveoptions = [axes = boxed]);.

Bu komandalar ishini bajargandan so‘ng 24– rasmdagi chiziqlar ko‘rinadi.◀

Misol. $z = 5 - x^2 - y^2$ sirt va unda joylashgan normal vektorlarni tasvirlashni ko‘raylik.

▷Sirtga o‘tkazilgan normal vektor gradientning birlik vektoriga teng. Quyidagi komandalar yordamida maqsadga erishamiz:

R := PositionVector([x, y, 5-x^2-y^2))], 'cartesian'[x, y, z]):

gr := Gradient(z-5+ x^2+y^2), [x, y, z]); nv := norm(gr, 2):

F := VectorField(VectorCalculus[`*`](gr/nv), 'cartesian'[x, y, z]):

PlotPositionVector(R, x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, vektorfield = F, surfaceoptions = [axes = boxed, scaling = constrained]);

Bu komandalarning natijasi 25 – rasmda keltirilgan.◀

4. Chiziqli integral

Chiziqli integralni hisoblash uchun maxsus **LineInt(F,p)** comandasidan foydalaniladi. **F** vektor maydon, **p** esa integrallash yo'lini aniqlovchi parametr. Ma'lumki, chiziqli integral $\int\limits_L (\bar{F}, d\bar{r})$ formuladan aniqlanadi. Bu yerda L chiziq $\bar{F}$ vektor maydon. komandasini ishlatishdan oldin **with(VectorCalculus)** va koordinatalar sistemasini aniqlovchi komanda sozlangan bo'lishi darkor, masalan, **SetCoordinates(cartesian[x, y])** .

Misol. Tekislikda r={x,y} vektor maydonning $A(1,2)$ va $B(3,-4)$ nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'yicha olingan chiziqli integralni hisoblang (yo'nalish A dan B nuqta tomon).

▷ Buning uchun

LineInt(VectorField(<x, y>), Line(<1, 2>, <3, -4>);

komandadan foydalanilsa, natijada 10 soni namoyon bo'ladi.

Berilgan maydonni $A(0,0)$, $B(1,1)$ va $C(1,-1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq to'g'ri chiziq bo'ylab integralini topish lozim bo'lsa,

LineInt(VectorField(<x, y>), LineSegment(<0, 0>, <1, 1>,<1,-1>);

komandasidan foydalaniladi. Unda 1 soni kelib chiqadi.◀

Misol. $\bar{F}=\{x^2,y^2\}$ vektor maydonning $y=x^2$ parabolaning (0,0) va (1,4) nuqtalari orasidagi chiziq bo'yicha olingan chiziqli integralni hisoblang.

▷ Buning uchun

LineInt(VectorField(<x^2, y^2>, Path(<x, x^2>, x = 0 .. 2));

komandani ishlatsak 24 qiymat chiqadi. ◀

Misol. {y,-x} vektor maydonning markazi koordinata boshida joylashgan radiusi r ga teng bo'lgan aylana bo'yicha olingan chiziqli integralni hisoblang.

▷ Buning yechimi

LineInt(VectorField(<y, -x>, Circle(<0, 0>, r));

komanda yordamida hal qilinadi va $-2\pi r^2$ qiymat kelib chiqadi.

LineInt(VectorField(<y, -x>, Ellipse((1/4)*x^2+(1/9)*y^2 = 1));

komandasi shu maydonning $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ellips bo'yicha olingan chiziqli integralini hisoblaydi.

Shu maydonning ellipsning birinchi choragida yotgan qismi bo'yicha chiziqli integralni hisoblash uchun

LineInt(VectorField(<y,-x>,Arc(Ellipse((1/4)*x^2+(1/9)*y^2= 1), 0, (1/2)*Pi));

komanda amalga oshiriladi va natijada -3π qiymat chiqadi.

Misol. $\{y,-x,z\}$ vektor maydonning chiziqli integralini hisoblang. Fazoviy chiziq normal vektori $\{1,1,1\}$ ga teng bo'lgan tekislikda joylashgan, markazi koordinata boshida radiusi r ga teng bo'lgan aylanadan iborat.

▷ Bu talabni

LineInt(VectorField(<y, -x, z>, Circle3D(<0, 0, 0>, r,<1, 1, 1>));

komandasi amalga oshiradi. Natijada $-\frac{2}{3}\sqrt{3}r^2\pi$ qiymat hosil bo'ladi. ◀

5. Oqimni hisoblash

Oqimni hisoblash uchun maxsus **Flux(F,p)** comandasidan foydalaniladi. **F** vektor maydon, **p** sirtni(uch o'lchovli fazoda) yoki chiziqni(ikki o'lchovli fazoda) aniqlovchi parametr. **Flux(F,p)** komandasini ishlatishdan oldin **with(VectorCalculus)** va koordinatalar sistemasini aniqlovchi komanda sozlangan bo'lishi darkor, masalan, **SetCoordinates(cartesian[x, y,z])** .

Sirtni aniqlovchi parametrlar sifatida **Box(rl, r2, r3, dir), Sphere (cen, rad, dir),** va **Surface(v, param)** lar ishlatiladi. **Box(rl, r2, r3, dir)** parametrda **rl,r2,r3** lar to'rtburchakli parallelopipedning tomonlari o'zgarish oraliqlarini ifodalaydi, **dir** esa normal vektorning yo'nalishini aniqlaydi; uning qiymatlari **inward** yoki bo'lishi mumkin. **dir** tushirib qoldirilishi ham mumkin, u holda uning qiymati **outward** bo'ladi.

Sphere(cen, rad, dir) parametr sirt sferik ko'rinishda bo'lganda as qotadi. **cen** sferaning markazini, **rad** radiusini ifodalaydi. Uchinchi **dir** parametr yo'nalishni aniqlaydi.

Surface(v, param) umumiy ko'rinishdagi sirtni aniqlaydi. **v** sirtning vektor ko'rinishdagi shaklini, **param** esa **v** dagi o'zgaruvchilarning oralig'ini ifodalaydi.

Ikki o'lchovli fazodagi oqimni topishda chiziqni aniqlovchi parametrlar **Arc(obj, start, finish)** (bu yerda obj **Circle** yoki **Ellipce**), **Circle(cen, rad,dir)**, **Ellipse(cen, a, b, phi, dir)**, **Line(pl, p2)**, **LineSegments(pl, p2, ..., pk)** kabi parametrlar ishlatiladi. Bular bilan biz chiziqli integralni hisoblashda tanishdik.

Misol. {y,-x,0} vektor maydonning parallelopiped to‘la sirtidan o‘tuvchi oqimni toping. Parallelopiped o‘lchamlari: $1 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 4,\ 5 \le z \le 6$.

▷ Quyidagi komanda

Flux(VectorField(<y, -x, 0>, cartesian[x, y, z]), Box(1 .. 2, 3 .. 4, 5 .. 6));
maqsadga olib keladi va natijada oqim nolga teng bo‘lishligi ko‘rinadi.◀

Misol. Radius vektorning radiusi r ga teng bo‘lgan sferadan o‘tuvchi oqimini toping (normal tashqi tomonga orientrlangan).

▷ Buning uchun

Flux(VectorField(<x, y, z>, cartesian[x, y, z]),
surface(<r, s, t>, s = 0 .. Pi, t = 0 .. 2*Pi, coords = spherical));
komandasini ishga tushirsak kerakli natijaga kelamiz: $4r^3\pi$.

Xuddi shu natijaga

Flux(VectorField(<x, y, z>, cartesian[x, y, z]), Sphere(<0, 0, 0>, r));
komanda yordamida ham erishsa bo‘ladi.

Agar

Flux (VectorField(<x, y, z>, cartesian[x, y, z]),
Sphere(<0, 0, 0>, r, 'inward'));
komanda bajarilganda natija $-4r^3\pi$ bo‘lar edi.◀

Misol. $\{y,-x,0\}$ vektor maydonning $z = x^2 + y^2$ paraboloidning $0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2$ shartlarni qanoatlantiruvchi qismidan o‘tuvchi *Oz* oqi bilan o‘tmas burchak hosil qilgan normal bo‘yicha oqimni toping.

▷Buning uchun

Flux(VectorField(<y, -x, 0>, cartesian[x, y, z]), Surface(<x, y, x^2+y^2>, [x, y] = Rectangle(0 .. 1, 2 .. 3)));
komandasidan foydalansak 0 qiymat chiqadi.

Agar shu komandada vektor maydonni **VectorField(<x*y, -x, xz>** ko‘rinishda bersak natija 17/4 bo‘lar edi.◀

Misol. $\{y^2z, z^2x, x^2y\}$ vektor maydonning $z = 4 - x + y$ tekislikning $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ silindr bilan ajratilgan yuqori qismidan o‘tuvchi oqimni toping.

▷ Buning uchun

Flux(VectorField(<y^2*z, z^2*x,x^2*y>, cartesian[x,y,z]),
Surface(<x, y, 4- x+y>, [x, y] = Circle(<1, 1>, 2)));
komanda ishga tushiriladi va uning natijasida 8π ifoda hosil bo‘ladi.◀

IZOHLI LUG‘AT

Antisimmetrik tenzor – buning uchun $T_{ij} = -T_{ji}$ shart bajariladi.

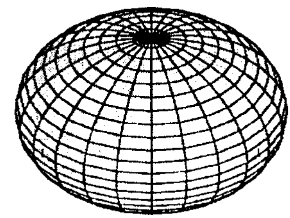
Bazis (ort) vektorlar – koordinata o‘qlarida joylashgan, musbat yo‘nalgan va modullari birga teng bo‘lgan vektorlar.

Birlik vektor – uzunligi birga teng vektor.

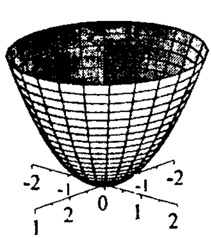
Chiziqli integral - $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ vektor maydondagi l chiziq bo‘yicha olingan chiziqli integral: $\int_l (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dy$, $\vec{a}$ kuchning l chiziq bo‘yicha bajargan ishiga teng.

Divergensiya - $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ vektor maydonning divergensiyasi dekart koordinatalar sistemasida $\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ ko‘rinishga ega bo‘lib u maydonning shu nuqtadagi quvvatini aniqlaydi.

Ellipsoid – dekart koordinatalar sistemasi tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ko‘rinishdagi sirtdan iborat bo‘ladi. a,b,c lar ixtiyoriy musbat sonlar. Ellipsida koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan. Ellips tekisliklar bilan kesilganda kesimda ellips, nuqta yoki bo‘sh to‘plam bo‘ladi. Agar $a \neq b \neq c$ bo‘lsa, bunday ellips uch o‘qli deyiladi.



Elliptik paraboloid – dekart koordinatalar sistemasida tenglamasi $z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, (p,q > 0)$ ko‘rinishda bo‘lgan sirt. Agar p=q bo‘lsa aylanma elliptik paraboloid deyiladi. p,q >0 bo‘lgani uchun parapoloid z=0 tekisligidan yuqorida joylashgan bo‘ladi. Paraboloid tekislik bilan kesilganda kesmada parabola yoki ellips, yoki nuqta, yoki bosh to‘plam hosil bo‘ladi.



Eynshteyn qoidasi - ifodada indeks takrorlanib kelsa shu indeks bo‘yisha yig‘iladi $\sum$ belgisi tushirib yoziladi (uch o‘lchovli fazoda indeks qiymati 1 dan 3 gacha o‘zgaradi)

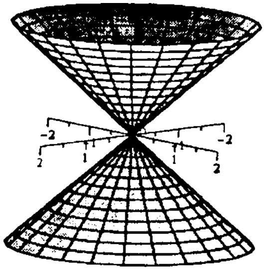
Ikkilangan vektor ko‘paytma - $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning ikkilangan ko‘paytmasi: $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$.

Invariant – ko‘p matematik obektlar biror koordinatalar sistemasida biror sonlar to‘plamida aniqlanadi (masalan, ikkinchi tartibli chiziq va sirtlar tenglama koeffitsiyentlari orqali). Ba'zi funksiyalar koordinatalar sistemasi o'zgarganda ko'rinishini o'zgartirmaydi. Bunday funksiyalar invariant funksiyalar bo'ladi.

Komplanar vektorlar – Bir to'g'ri chiziq yoki parallel to'g'ri chiziqlarda joylashgan vektorlar.

Komplanar vektorlar – bir yo'ki parallel tekislikda joylashgan bir necha vektorlar.

Konus – dekart koordinatalar sistemasida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ tenglama orqali berilgan sirt:



Konus sirt – tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, ko'rinishdagi sirtdan iborat bo'lari. a,b,c lar ixtiyoriy musbat sonlar. Konus koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan. Konus tekislik bilan kesilganda kesmada, tekislikning joylashishiga qarab, ellips, parabola yoki giperboladan iborat bo'lishi mumkin.

Kroneker belgisi - $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{agar } i=j \text{ bo'lsa}\\ 0, & \text{aks holda}\end{cases}$ qoida bo'yicha aniqlanadigan miqdor.

Laplas operatori – u=u(x,y,z) skalyar maydonning Laplas oeratori: $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Levi-Chivita simvoli -

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{agar } \{i,j,k\} \text{ o'rin almashtirishlar soni juft bo'lsa}\\ -1, & \text{agar } \{i,j,k\} \text{ o'rin almashtirishlar soni toq bo'lsa}\\ 0, & \text{indekslar ichida bir-biriga tenglari uchrasa.}\end{cases}$$

Nabla – simvolik operator: $\vec{\nabla}=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$.

Normal – chiziqqa o'tkazilgan normal chiziqning shu nuqtasiga o'tkazilgan urinmaga perpendikulyar bo'lgan chiziq; sirtga o'tkazilgan normal sirtning shu nuqtasidan o'tadigan va sirtning shu nuqtasiga o'tkazilgan urinma tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

Ostragradskiy – Gauss formulasi - $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ vektor maydon va yopiq S sirt berilgan bo'lsa, yopiq sirtdan o'tadigan oqim S sirtni o'rovchi V xajmdan olingan uch karrali integralga teng: $\oint\!\!\oint_S (\vec{a},\vec{n})dS = \iiint_V \mathrm{div}\vec{a}dV$.

Sath sirt(chiziq) – $u=u(x,y,z)$ skalyar maydonning bir xil qiymat qabul qiladigan nuqtalarning o'rni: $u(x,y,z)=C$.

Simmetrik tenzor – ikkinchi rang tenzor komponentlari uchun $T_{ij}=T_{ji}$ bo'ladi.

Sirkulyasiya – yopiq chiziqdan olingan chiziqli integral: $\oint_l (\vec{a},d\vec{r})$.

Skalyar – sonli qiymati bilan to'liq aniqlanadigan miqdor.

Skalyar maydon gradienti - $u=u(\vec{r})=u(x,y,z)$ skalyar maydon gradienti: $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, gradient sath sirtga perpendikulyar yo'nalgan bo'ladi.

Stoks formulasi - $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ vektor maydonning biror L yopiq chiziq bo'yicha olingan sirkulyatsiyasi, shu yopiq chiziqqa tiralgan ixtiyoriy S sirtdan $\mathrm{rot}\vec{a}$ dan olingan oqimga teng: $\oint_L (\vec{a},d\vec{r}) = \iint_S (\mathrm{rot}\vec{a},\vec{n})dS$.

Tekislikning normal vektori - $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikning normal vektori: $\vec{n}=\{A,B,C,\}$.

Tenzor - Agar uch o'lchovli fazoda 3^R miqdorlar ortogonal koordinatalar sistemasini burishda eski va yangi bazislarda $T'_{i_1i_2\cdots i_R}=\alpha_{i_1k_1}\alpha_{i_2k_2}\cdots\alpha_{i_Rk_R}T_{k_1k_2\cdots k_R}$ qoida bo'yicha bog'langan bo'lsa, bunday miqdorlarga *R- rang tenzorlar* deyiladi.

Tenzorlarni ko'paytirish – tenzorni tenzorga ko'paytirishda ko'paytuvchi tenzor ranglari qo'shiladi.

Tenzorlarni qo'shish - faqat bir xil rangli tenzorlarni qo'shish mumkin va qo'shishda mos koordinatalari qo'shiladi.

Tenzorni yig'ishtirish – tenzorni yig'ishtirishda uni Kroneker belgisiga tenzor ko'paytirishdan iborat: masalan, $A_{ijk}\delta_{jk}=A_{ijj}$ bundan Eyinshteyn qoidasidan $A_{ijj}=B_i$ kelib chiqadi.

Tenzorning xos soni xos vektori – tenzor komponentalari uchun $T_{ij}A_j=\lambda A_i$ o'rinli bo'lsa, λ ga tenzorning xos soni A_i ga xos vektori deyiladi.

Vektor – ham sonli qiymati, ham yo'nalishi bilan aniqlanadigan kattalik

Vektor chiziq – ikki yori ikki o'lchovli fazoda fazoviy chiziq o'zining koordinatalari orqali berilishi.

Vektor funksiya differensiali - $dr(t)=r'(t)dt$

Vektor funksiya godografi - $\vec{r}(t)=\overline{OM}$ radius vektorning M nuqta o'rinlar to'plami.

Vektor ko'paytma – ikki $\vec{a},\vec{b}$ vektorning vektor ko'paytmasi shunday $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ vektorki, unda 1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ φ - $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak, 2) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar, 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ o'ng sistemani tashkil qiladi.

Vektor koordinatalarini almashtirish – bir koordinatalar sistemasidan ikkinchisiga o'tganda vektorning koordinatalari orasidagi munosabat.

Vektor maydon – fazodagi P(x,y,z) nuqtaning radius vektori: $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ orqali aniqlanadigan vektor funksiya: $\vec{a}(\vec{r})=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$

Vektor maydon oqimi - $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ vektor maydonning biror S sirtdan o'tadigan oqimi: $\iint\limits_S(\vec{a},\vec{n})dS=\iint\limits_S a_n dS$ sirt integrali.

Vektor maydon rotori - $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ vektor maydon potori:

$$\mathrm{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

Vektor moduli - $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ vektorning moduli(uzunligi) $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Vektor turubkasi - vektor maydonda biror sirt berilsa, uning chegaralaridan vektor chiziqlari o'tkazilsa, bu chiqlar to'plami.

Vektorning koordinatalari (komponentalari) – vektorning koordinata o'qlardagi proyeksiyalari.

Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari – vektorning *Ox, Oy, Oz* o'qlari bilan hosil qilgan burchaklarining kosinuslari, yo'naltiruvchi kosinuslar orasidagi munosabat: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Yo'nalish bo'yicha hosila – $u=u(x,y,z)$ skalyar maydonning $\vec{l}$ vektor yo'nalishi bo'yicha hosila: $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ $\vec{l}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari.

TESTDAN NAMUNALAR

№1

$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\mathbf{j}+2\boldsymbol{k}$ vektor maydonning A(1,0,1), B(0,0,1), C(0,1,1) nuqtalarni tutashtiruvchi uchburchakdan o'tuvchi oqimni toping (normal koordinata boshi tomon yo'nalgan

A) -1 B) 2 C) 1 D) 3

№2

$\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y\mathbf{j}+2\boldsymbol{k}$ vektor maydonning A(1,0,0), B(1,1,0), C(1,1,1), D(1,0,1) nuqtalarni tutashtiruvchi to'rt burchakdan o'tuvchi oqimni toping (normal koordinata boshi tomon yo'nalgan)

A) -2 B) 2 C) 3 D) 5

№3

$\boldsymbol{a}=x^3\,\boldsymbol{i}+2y\mathbf{j}+\boldsymbol{k}$ vektor maydonning z=1 tekislikning $x^2+y^2=z^2$ sirt bilan kesishgan yo'qori qismidan o'tuvchi oqimni toping

A) 2π B) 3π C) π D) $-\pi$

№4

$\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+z\mathbf{j}+\boldsymbol{k}$ vektor maydonning z =2 tekislikning $x^2+y^2=9$ sirt bilan kesishgan yuqori qismidan o'tuvchi oqimni toping

A) 9π B) 3π C) π D) -9π

№5

$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\mathbf{j}+z\boldsymbol{k}$ vektor maydonning $x^2+y^2=z^2$ konusning z = 0 va z = 1 tekisliklar bilan ajratilgan yon sirtidan tashqariga chiquvchi oqimni toping

A) 3π B) 2 C) 0 D) 4π

№6

$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\mathbf{j}+z\boldsymbol{k}$ vektor maydonning z = 1 tekislikning $x^2+y^2=z^2$ konus bilan ajratilgan yuqori qismidan o'tuvchi oqimni toping

A) 0 B) 2π C) π D) 4π

№7

u=(**r**,$\boldsymbol{a}$), skalyar maydonning M (1,0,1) nuqtadan o'tuvchi sath sirtini toping

(r=xi +yj+zk, $\boldsymbol{a}$= 3i +j+k)

A) $3x+y+z=4$ B) $3x+y+z=0$ C) $3x+y+z=8$ D) $x+y+z=10$

№8

$x+2y+2z=8$ sirtning (1,0,2) nuqtasigagi normal vektorni toping

A) {1,1,2} B) {3,2,1} C) {2,2,2} D) {1,2,2}

№9

$u=1/(xy)+xy/z$ skalyar maydonning M(1;1;1) nuqtadagi gradientini toping

A) {0,0,-1} B) {1,1,1} C) {0,2,-1} D) {-1,-2,2}

№10

$u=xy^2+x^2z+1$ skalyar maydonning M(1;1;1) nuqtadagi yo'nalish bo'yicha hosilasini toping. Yo'nalish M dan N(2;3;3)nuqtaga yo'nalgan

A) -3 B) 8 C) 5 D) 3

№11

$u=xy+yz+xz$ skalyar maydonning M(1;1;1) nuqtadagi eng katta o'sish yo'nalishini toping

A) {1,1,1} B) {1,2,3} C) {2,2,2} D) {,3,2,1}

№12

$u=xy+y$ skalyar maydonning qaysi nuqtasidagi maydon gradienti $2i+j$ vektorga teng bo'ladi?

A) (0,2) B) (1,2) C) (0,0) D) (0,3)

№13

$a=zyi+(3z+x)/x\,j+x/y\,k$ vektor maydonning $x^2+y^2=4$ silindrning $z=0$ va $x/2+y/3+z/5=1$ tekisliklar orasida joylashgan qismining to'la sirtidan o'tadigan oqimni toping

A) 32 B) 16 C) 2 D) 0

№14

$a=zyi+(3z+x)/x\,j+k$ vektor maydonning $x^2+y^2+z^2=4$ $(z=0)$ sferaning yuqori tomonidan o'tadigan oqimini toping

A) 4 B) 0 C) -2 D) 6

№15

g ning qanday qiymatida a=gx i+(3z+x)/x j+ x/(x+3y) k vektor maydon solenoidal bo'ladi?

A) g=4 B) g=3 C) g=5 D) g=0

№16

$\boldsymbol{a} = x/(zy)\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + x/z\,\boldsymbol{k}$ maydon uchun $div\boldsymbol{a}(1;1;1)=?$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 4

№17

$\boldsymbol{a} = yz\,\boldsymbol{i} + yz\,\boldsymbol{j} + xy\,\boldsymbol{k}$ maydon uchun $rot\boldsymbol{a}(1;1;1)=?$

A) 3 B) {0,0,1} C) {1,0,0} D) {1,1,1}

№18

$\boldsymbol{a} = (x^2+y)\,\boldsymbol{i} + z\,\boldsymbol{j} + x/z\,\boldsymbol{k}$ maydonning A(1;1;1)va B(1;2;1) nuqtalarni tutashtiruvchi tug'ri chiziq bo'yicha chiziqli integralni hisoblang

A) 2/7 B) 2 C) 0 D) 1

№19

Maydonlarning qaysilari potensialli maydon *1.* $\{xz;\ 2y;\ xy\}$ *2.*$\{2xy+z^2;\ 2yz+x^2;\ 2\,xz+y^2\}$ *3.*$\{x^3;\ y^3;\ xz^3\}$ *(to'la javobni keltiring)*

A) 2 B) 1, 2 C) hammasi D) 3

№20

$\vec{a}$ vektor maydon berilgan, δ_{ij} Kroneker belgisi.

$\vec{a} = \{1,3,-1\};\ a_i a_j \delta_{ij} = ?$

A) 11 B) 12 C) 0 D) 9

№21

a tenzor maydon berilgan, δ_{ij} Kroneker belgisi.

$a_{ij} = i + j;\ a_{ij}\delta_{ij} = ?$

A) 4 B) 12 C) 24 D) 0

№22

d 3 – rang tenzor maydon berilgan, δ_{ij} Kroneker belgisi.

$d_{ijk} = i + j - k;\ d_{ijk}\delta_{jk} = ?$

A) {3,6,9} B) {1,2,3} C) {4,6,8} D) {3,6,-9}

№23

d 3 – rang tenzor maydon berilgan, δ_{ij} Kroneker belgisi.

$d_{iklm} = i + 2j - k;\ d_{iklm}\delta_{ki}\delta_{ml} = ?$

A) {-1,23,8} B) {15,12,9} C) {3,8,10} D) {12,12,0}

№24

a 2 – rang tenzor maydon berilgan, δ_{ij} Kroneker belgisi.

$a_{ij} = 2 + i \cdot j;\ a_{ij}\delta_{ij} = ?$

A) 20 B) 11 C) 32 D) 16

Mustaqil ish variantlaridan namunalar

1- Misol.

$u(x,y,z)$ maydonning M nuqtadagi S sirtga normal yo'nalishidagi hosilasini toping (normal oz o'qi bilan o'tkir burchak tashkil qiladi)

1) $u = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz, S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1, M(1,1,1).$

2) $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}, S: 4z - 2x^2 - y^2 = 8, M(2,4,4).$

3) $u = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz, S: x^2 + y^2 - 2z^2 = 1, M(1,1,1).$

4) $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}, S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4, M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right).$

5) $u = xz^2 - \sqrt{x^3y}, S: x^2 - 2y^2 - 3z + 12 = 0, M(2,2,4).$

6) $u = x\sqrt{y} - yz^2, S: x^2 + y^2 = 4z + 9, M(1,1,1).$

7) $u = 7\ln\left(\frac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz, S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7, M(1,1,1).$

8) $u = arctg\left(\frac{y}{x}\right) + xz, S: x^2 + y^2 - 2z = 10, M(2,2,-1).$

9) $u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}, S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16, M(1,-2,4).$

10) $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z, S: x^2 + y^2 = 24z + 1, M(3,4,1).$

2-Misol.

$u(x,y,z)$ skalyar maydonning M nuqtadagi l yo'nalishdagi hosilasini toping.

1) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}, l = i - j + k, M(1,1,1).$

2) $u = x + \ln(z^2 + y^2), l = -2i + j - k, M(2,1,1).$

3) $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}, l = 2j - 2k, M(1,5,-2).$

4) $u = y\ln(1+x^2) - arctgz, I = 2i - 3j - 2k, M(0,1,1).$

5) $u = x(\ln y - arctgz), I = 8i + 4j + 8k, M(-2,1,-1).$

6) $u = \ln(3-x^2) + xy^2z, I = -i + 2j - 2k, M(1,3,2).$

7) $u = (\sin(x+2y) + \sqrt{xyz}, I = 4i + 3j, M(\pi/2, 3\pi/2, 1).$

8) $u = x^2y^2z - \ln(z-1), I = 5i - 6j + 2\sqrt{5}k, M(1,1,2).$

9) $u = x^3 + \sqrt{y^2+z^2}, I = -j - k, M(1,-3,4).$

10) $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y} - \dfrac{yz}{x+\sqrt{y}}, I = 2i + k, M(4,1,-2).$

3- Misol.

Vektor maydonning vektor chiziqlarini toping.

1) $a = 4yi - 9xj.$
2) $a = 2yi + 3xj.$
3) $a = 2xi + 4yj.$
4) $a = xi + 3yj.$
5) $a = xi + 4yj.$
6) $a = 3xi + 6zk.$
7) $a = 4zi - 9xk.$
8) $a = 2zi + 3xk.$
9) $a = 4yj + 8zk.$
10) $a = yj + 3zk.$

4- Misol.

a vektor maydonning S sirtning P_1 va P_2 tekisliklar bilan kesishish qismlaridan o'tuvchi oqimni toping (normal yopiq sirtga tashqi yo'nalgan).

1) $a = xi + yj + zk, S : x^2 + y^2 = 1, P_1 : z = 0, P_2 : z = 2.$
2) $a = xi + yj - zk, S : x^2 + y^2 = 1, P_1 : z = 0, P_2 : z = 4.$
3) $a = xi + yj + 2zk, S : x^2 + y^2 = 1, P_1 : z = 0, P_2 : z = 3.$
4) $a = xi + yj + z^3k, S : x^2 + y^2 = 1, P_1 : z = 0, P_2 : z = 1.$
5) $a = xi + yj + xyzk, S : x^2 + y^2 = 1, P_1 : z = 0, P_2 : z = 5.$
6) $a = (x-y)i + (x+y)j + z^2k, S : x^2 + y^2 = 1, P_1 : z = 0, P_2 : z = 2.$
7) $a = (x+y)i - (x-y)j + xyzk, S : x^2 + y^2 = 1, P_1 : z = 0, P_2 : z = 4.$
8) $a = (x^3 + xy^2)i + (y^3 + x^2y)j + z^2k, S : x^2 + y^2 = 1, P_1 : z = 0, P_2 : z = 3.$

9) $a = xi + yj + \sin zk, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 0, P_2: z = 5.$

10) $a = xi + yj + k, S: x^2 + y^2 = 1, P_1: z = 0, P_2: z = 1.$

5- Misol.

a vektor maydonning S sirtning P tekislik bilan ajratilgan qismidan o'tuvchi oqimini toping (normal sirtlar bilan chegaralangan yopiq sohaga tashqi)

1) $\vec{a} = (x + xy^2)i + (y - yx^2)j + (z - 3)k, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 1.$

2) $\vec{a} = yi - xj + k, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 4.$

3) $a = xyi - x^2 j + 3k, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 1.$

4) $a = xzi + yzj + (z^2 - 1)k, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 4.$

5) $a = y^2 xi - yx^2 j + k, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 5.$

6) $a = (xz + y)i + (yz - x)j + (z^2 - 2)k, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 3.$

7) $a = xyzi + x^2 zj + 3k, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 2.$

8) $a = (x + xy)i + (y - x^2)j + (z - 1)k, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 3.$

9) $a = (x + y)i + (y - x)j + (z - 2)k, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 2.$

10) $a = xi + yj + (z - 2)k, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 2.$

6-Misol.

a vektor maydonning P tekislikning 1-oktantadagi qismidan o'tuvchi oqimni hisoblang (normal z o'qi bilan o'tkir burchak tashkil qiladi)

1) $a = xi + yj + zk, P: x + y + z = 1.$

2) $a = yj + zk, P: x + y + z = 1.$

3) $a = 2xi + yj + zk, P: x + y + z = 1.$

4) $a = xi + 3yj + 2zk, P: x + y + z = 1.$

5) $a = xi + 3yj, P: x + y + z = 1.$

6) $a = xi + yj + zk, P: \frac{x}{2} + y + z = 1.$

7) $a = xi + 2yj + zk, P: \frac{x}{2} + y + z = 1.$

8) $a = yj + 3zk, P: \frac{x}{2} + y + z = 1.$

9) $a = xi + yj + zk, P: x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

10) $a = 2xi + yj + zk, P : x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

7- Misol.

Yopiq sirtdan o'tuvchi oqimni toping (normal tashqi)

1) $a = (e^x + 2x)i + e^x j + e^y k, S : x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

2) $a = (3z^2 + x)i + (e^x - 2y)j + (2z - xy)k, S : x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 4.$

3) $a = (\ln y + 7x)i +)\sin z - 2y)j + (e^y - 2z)k, S : x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2.$

4) $a = (\cos z + 3x)i + (\sin z - 2y)j + (e^y - 2z)k, S : z^2 = 36(x^2 + y^2), z = 6.$

5) $a = (e^{-z} - x)i + (xz + 3y)j + (z + x^2)k, S : 2x + y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$

6) $a = (6x - \cos y)i - (e^x + z)j - (2y + 3z)k, S : x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 2.$

7) $a = (4x - 2y^2)i + (\ln z - 4y)j + \left(x + \frac{3z}{4}\right)k, S : x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3.$

8) $a = (1 + \sqrt{z})i + (4y - \sqrt{x})j + xyk, S : z^2 = 4(x^2 + y^2), z = 3.$

9) $a = (\sqrt{z} - x)i + (x - y)j + (y^2 - z)k, S : 3x - 2y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0.$

10) $a = (yz + x)i + (x^2 + y)j + (xy^2 + z)k, S : x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$

8-Misol.

Yopiq sirtdan o'tuvchi oqimni toping (normal tashqi)

1) $a = (x + z)i + (z + y)k,\ S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, z = 0 (z \geq 0). \end{cases}$

2) $a = 2xi + zk,\ S : \begin{cases} z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 4, z = 0. \end{cases}$

3) $a = 2xi + 2yj + zk,\ S : \begin{cases} y = x^2, y = 4x^2, y = 1 (x \geq 0), \\ z = y, z = 0. \end{cases}$

4) $a = 3xi - zj,\ S : \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0). \end{cases}$

5) $a = (z + y)i + yj - xk,\ S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y = 2. \end{cases}$

6) $a = xi - (x + 2y)j + yk,\ S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, z = 0, \\ x + 2y + 3z = 6. \end{cases}$

7) $a = 2(z-y)i + (x-z)k,\ S: \begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1, z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

8) $a = xi + zj - yk,\ S: \begin{cases} z = 4 - 2(x^2 + y^2), \\ z = 2(x^2 + y^2). \end{cases}$

9) $a = zi - 4yj + 2xk,\ S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$

10) $a = 4xi - 2yj - zk,\ S: \begin{cases} 3x + 2y = 12, 3x + y = 6, y = 0, \\ x + y + z = 6, z = 0. \end{cases}$

9-Misol.

Yopiq sirtdan o‘tuvchi oqimni toping (normal tashqi)

1) $a = x^2 i + xj + xzk,\ S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, z = 1, \\ x = 0, y = 0, \\ \text{(1-oktant)} \end{cases}$

2) $a = (x^2 + y^2)i + (y^2 + z^2)j + (y^2 + z^2)k,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$

3) $a = x^2 i + y^2 j + z^2 k,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2 (z \ge 0). \end{cases}$

4) $a = x^2 i + yj + x/zk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 (z \ge 0). \end{cases}$

5) $a = xzi + zj + yk,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$

6) $a = 3xzi - 2xi + yk,\ S: \begin{cases} x + y + z = 2, x = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$

7) $a = x^2 i + y^2 j + z^2 k,\ S: \begin{cases} z = x^2 + y^2 + z^2, \\ z = 0 (z \ge 0). \end{cases}$

8) $a = x^3 i + y^3 j + z^3 k,\ S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

9) $a = (zx + y)i + (zy - x)j + (x^2 + y^2)k,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 (z \ge 0). \end{cases}$

10) $a = y^2 xi + z^2 yj + x^2 zk,\ S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$

10-Misol.

F kuchning L chiziq bo'ylab M nuqtadan N nuqtaga ko'chishdagi ishini toping

1) $F=(x^2-2y)i+(y^2-2x)j, L:\ MN, M(-4,0), N(0,2).$

2) $F=(x^2+2y)i+(y^2+2x)j, L:\ MN, M(-4,0), N(0,2).$

3) $F=(x^2+2y)i+(y^2+2x)j, L: 2-\dfrac{x^2}{8}=y, M(-4,0), N(0,2).$

4) $F=(x+y)i+2xj, L: x^2+y^2=4(y\geq 0), M(2,0), N(-2,0).$

5) $F=x^3i-y^3j, L: x^2+y^2=4(x\geq 0, y\geq 0), M(2,0), N(0,2).$

6) $F=(x+y)i+(x-y)j, L: y=x^2, M(-1,1), N(1,1).$

7) $F=x^2yi-yj, L:\ MN, M(-1,0), N(0,1).$

8) $F=(2x-y)i+(x^2+x)j, L: x^2+y^2=9(y\geq 0), M(3,0), N(-3,0).$

9) $F=(x+y)i+(x-y)j, L: x^2+\dfrac{y^2}{9}=1(x\geq 0, y\geq 0), M(1,0), N(0,3).$

10) $F=yi-xj, L: x^2+y^2=1(y\geq 0), M(1,0), N(-1,0).$

11-Misol.

Maydoning yopiq kontur bo'yicha sirkulyatsiyasini toping

1) $a=yi-xj+z^2k,\quad \Gamma:\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t, y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \\ z=\sin t. \end{cases}$

2) $a=-x^2y^3i+j+zk,\quad \Gamma:\begin{cases} x=\sqrt[3]{4}\cos t, y=\sqrt[3]{4}\sin t, \\ z=3. \end{cases}$

3) $a=(y-z)i+(z-x)j+(x-y)k,\quad \Gamma:\begin{cases} x=\cos t, y=\sin t, \\ z=2(1-\cos t). \end{cases}$

4) $a=x^2i+yj-zk,\quad \Gamma:\begin{cases} x=\cos t, y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t. \end{cases}$

5) $a=(y-z)i+(z-x)j+(x-y)k,\quad \Gamma:\begin{cases} x=4\cos t, y=4\sin t, \\ z=1-\cos t. \end{cases}$

6) $a=2yi-3xj+xk,\quad \Gamma:\begin{cases} x=2\cos t, y=2\sin t, \\ z=2-2\cos t-2\sin t. \end{cases}$

7) $a = 2zi - xj + yk, \quad \Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, y = 2\sin t, \\ z = 1. \end{cases}$

8) $a = yi - xj + zk, \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$

9) $a = xi + z^2 j + yk, \quad \Gamma: \begin{cases} x = \cos t, y = 2\sin t, \\ z = 2\cos t - 2\sin t - 1. \end{cases}$

10) $a = 3yi - 3xj + xk, \quad \Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t, y = 3\sin t, \\ z = 3 - 3\cos t - 3\sin t. \end{cases}$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Begmatov A., Musina N. G. Tenzor hisob elementlari. O'quv qo'llanma. Toshkent, Universitet, 1993.

2. Mallin R. X. Maydon nazariyasi. «O'qituvchi» nashriyoti, Toshkent, 1965.

3. Narmanov A. Ya. Sherg'oziyev B. U. Tenzor analiz elementlari. O'zMU, Toshkent, 2002.

4. Xodjayev B.A., Mahmudova D.M., Dalaboyev U. Vektor va tenzor analiz asoslaridan misol va mashqlar. O'zMU, Uslubiy qo'llanma, Toshkent, 2013.

5. Xushvaqtov M. Dalaboyev U. Asadova S. Vektor va tenzor analiz asoslari. Toshkent, «Universitet», 1988.

6. Xushvaqtov M., Dalaboyev U., Asadova S., Baxramov F. Vektor va tenzor analiz asoslaridan masalalar va mashqlar. Toshkent, «Universitet», 1993.

7. Акивис М.А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление, Учеб. пособие, М., «ФИЗМАТЛИТ», 2003.

8. Арфкен Г. Математические методы в физике. М., АТОМИЗДАТ, 1970.

9. Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Харьков: Вища шк.; Изд-во при Харьк. гос. ун-те, 1986.

10. Вильчевская Е. А. Тензорная алгебра и тензорный анализ. Учебное пособие. Санк-Петерберг, 2012.

11. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: Изд – во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001.

12. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. М.: Наука, 1968.

13. Дьяконов В.П. Maple 9 в математике, физике и образовании. – М.: Солон-Пресс, 2004.

14. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Векторный анализ. М.: Наука, 1975.

15. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, М.: «Наука», 1965.

16. Кумляк Д. Е. Векторный и тензорный анализ. Учебное пособие. Тверь, 2007.

17. Лапин И. А., Ратафьева Л.С.. Кратные интегралы. Теория поля. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009.

18. Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления М.: Наука, 1975.

19. Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа. Санкт-Петербург. Издательство Политехнического университета, 2008.

20. Тихоненко А.В. Векторный анализ в прикладных математических пакетах. – Обнинск: ИАТЭ, 2006.

21. Murray R. Spiegel Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis, 1959.

22. Jespe Ferking-Borg. Introduction to Vector and Tensor analysis, 2007.

23. Joseph C. Kolecki. Foundations of Tensor Analysis for Students of Physics and Engineering with an Introduction of the Teory of Relativity. Gleen Research Center, Cleveland, Ohio, 2005.

24. Joseph C. Kolecki. An Introduction to Tensor for Students of Physics and Engineering. Gleen Research Center, Cleveland, Ohio, 2005.

Internet manbalari:

1. http: //www.exponenta .ru
2. http: // gltrs.grc.nasa.gov
3. http: // www.geocities.com/r-sharipov

MUNDARIJA

Kirish 3

I bob. SKALYAR VA VEKTOR MAYDONLAR

1. Skalyar maydon 6

1.1 Skalyar maydon tushunchasi 6

1.2 Maydonlarning sath sirt va sath chiziqlari 8

1.3 Berilgan yo'nalish bo'yicha hosila 11

1.4 Skalyar maydon gradienti 15

1.5 Sirt normalining yo'naltiruvchi kosinuslari 18

2. Vektor maydon 21

2.1 Vektor maydon tushunchasi 21

2.2 Vektor chiziqlari. Vektor chiziqlarining differensial tenglamasi 23

3. Vektor maydon oqimi 28

3.1 Suyuqlikning oqimi masalasi 29

3.2 Oqim tushunchasi va uning yozilish shakllari 31

3.3 Oqimni hisoblash 33

3.4 Vektor maydon divergensiyasi 36

3.5 Yopiq sirt bo'yicha oqimning fizik ma'nosi 37

3.6 Ostrogradskiy - Gauss formulasi 38

3.7 Divergensiyaning invariant ta'rifi 43

4. Vektor maydonidagi chiziqli integral 46

4.1 Kuch maydoni bajargan ish 46

4.2 Chizli integral tushunchasi va uning xossalari 47

4.3 Chiziqli integralni hisoblash 48

4.4 Vektor maydon urunmasi 52

4.5 Grin va Stoks formulalari 53

4.6 Rotorning invariant ta'rifi 59

4.7 Rotorning fizik manosi 60

4.8 Chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaslik sharti 60

5. Maxsus vektor maydonlar. Vektor maydonning takroriy amallari. Nabla operatori 66

5.1 Potensial maydon 66

5.2 Solenoidal maydon 69

5.3 Garmonik maydon 72

5.4 Vektor maydonning takroriy amallari 74

5.5 Nabla operatori 75

6. Vektor tahlilning egri chiziqli koordinatalar sistemasidagi asosiy amallari **79**
6.1 Egri chiziqli koordinatalar 79
6.2 Egri chiziqli koordinatalar sistemasida vektor analaizning asosiy amallari 83
II bob. TENZOR HISOB ELEMENTLARI
7. Koordinatalar sistemasini burishda vektorlarni almashtirish **92**
7.1 Dekart koordinatalar sistemasida bazis 92
7.2 Ortlarni almashtirish 93
7.3 Vektor koordinatalarini almashtirish 95

8. Tenzorlar algebrasi 97
8.1 Tenzor tuchunchasiga olib keladigan fizik masala 97
8.2 Tenzor tushunchasi 100
8.3 Tenzorlar ustida amallar 102
9. Simmetrik va antisimmetrik tenzorlar 104
9.1 Simmetrik va antisimmetrik tenzorlar 104
9.2 Tenzorning xos va xos vektorlari 106
9.3 Tenzorning xarakteristik sirti 109
9.4 Ikkinchi rang tenzorning invariantlari 110
10. Levi-Chivita simvoli. Inversiya 111
10.1 Levi-Chivita simvoli 111
10.2 Vektor koordinatalarini inversiyada almashishi.... 114
10.3 Tenzor miqdorlarning inversida almashishi 115
11. Tenzor tahlil elementlari 117
1-ilova. Vektorlarga oid asosiy ma'lumotlar 119
2-ilova. Vektor tahlil kursida Maple tizimidan foydalanish 124
Izohli lug'at 141
Testdan namunalar 145
Foydalanilgan adabiyotlar 155

U. DALABOYEV

VEKTOR VA TENZOR TAHLIL

Toshkent – «Fan va texnologiya» – 2015

Muharrir:	N.Rasulmuhamedova
Tex. muharrir:	M.Holmuhamedov
Musavvir:	D.Azizov
Musahhih:	N.Hasanova
Kompyuterda sahifalovchi:	Sh.Mirqosimova

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Tel: 245-57-63, 245-61-61.
Nashr.lits. AI№149, 14.08.09. Bosishga ruxsat etildi 10.11.2015.
Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$. «Timez Uz» garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i 9,75. Nashriyot bosma tabog'i 10,0.
Tiraji 500. Buyurtma №168.

8000c

«Fan va texnologiyalar Markazining bosmaxonasi» da chop etildi.
100066, Toshkent sh., Olmazor ko'chasi, 171-uy.